Lehrbuch

der

ebenen Geometrie

für

höhere Lehranstalten

nach

der Entwicklungsmethode bearbeitet

von

J. Gilles,
Gymnasiallehrer in Düsseldorf.

Heidelberg.
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung.
1877.

Vorrede.

Wenn auch die Zahl der Lehrbücher in der Geometrie eine große ist, so fehlt es doch an einem solchen, in welchem die Entwicklungsmethode wenigstens in annähernd vollständiger Weise zur Anwendung kommt. In allen Lehrbüchern erscheinen die Lehrsätze in loser Verbindung; der durchgehende, das Einzelne zu einem Ganzen zusammenschließende Faden zeigt sich erst dem tiefer Eingedrungenen; das Ganze aber stellt sich dar als eine geordnete Zusammenstellung von mehr oder weniger zufällig aufgefundenen Lehrsätzen. Das Abstoßende, welches in Folge dessen die Geometrie für Viele hat, wird aber noch dadurch vermehrt, daß der Lehrsatz vorangestellt wird, und erst dann die Gründe angeführt werden. Nachdem also der Schüler an das Ziel versetzt worden und sich dasselbe angesehen hat, wird er gezwungen zurückzugehen, um dann dasselbe Ziel mühevoll im Beweise zu erklimmen. Dieser hat in Folge dessen für viele Schüler nicht mehr das nöthige Interesse, es winkt ihnen nicht mehr die Auffindung von etwas Neuem; was sie erreichen können, ist das, was sie schon wissen. Hierzu kömmt, daß die meisten Beweise zwar die Ueberzeugung von der Richtigkeit des Lehrsatzes, nicht aber die Einsicht in das Warum desselben erzielen. Diese Einsicht und damit auch die Freude an der Geometrie sucht das vorliegende Lehrbuch zu erleichtern. Der Schüler soll das Werden, das Entstehen der mathematischen Gebilde sehen oder vielmehr dieselben selbst erzeugen und so bis auf ihren Grund durchschauen.

Düsseldorf, den 20. August 1876.

Gilles.

Einleitung.

§ 1.

Gegenstand der Mathematik ist die Größe. Dieselbe entsteht durch Bewegung, d. i. durch Thätigkeit. Man unterscheidet continuirliche oder stetige und discrete oder unterbrochene Bewegung. Durch jene entsteht die Raumgröße, durch diese die Zahlengröße. Mit den Raumgrößen beschäftigt sich die Geometrie, mit den Zahlengrößen die Arithmetik.

Geometrie.

§ 2.

Die Geometrie ist die Lehre von der Raumgröße, welche durch stetige Bewegung in der reinen Anschauung entsteht, indem man mit geschlossenen Augen, überhaupt unabhängig von der Außenwelt die Raumgebilde construiren kann.

Die beginnende Bewegung ist der Punkt. Derselbe hat keine Ausdehnung. Durch die Bewegung des Punktes entsteht die Linie. Dieselbe hat eine Ausdehnung, welche Länge heißt. Obwohl aber die Linie durch die Bewegung des Punktes entsteht, besteht sie doch nicht aus Punkten, da das Ausdehnungslose nicht durch Summirung ein Ausgedehntes werden kann. Bei der Entstehung der Linie finden wir, daß die Bewegung, wodurch dieselbe entsteht, eine dreifache Thätigkeit ist: die erzeugende, die zusammenfassende und die zurückwirkende Thätigkeit. Die erzeugende Thätigkeit würde für sich allein immer nur einen Punkt in wechselnder Lage liefern. Erst durch zusammenfassende Thätigkeit, durch welche die verschiedenen Lagen festgehalten werden, entsteht das ausgedehnte Gebilde. Die zusammenfassende Thätigkeit ist nicht möglich ohne Rückbewegung, durch welche

auch das Gebildete begrenzt wird. Dieselbe dreifache Thätigkeit finden wir auch bei der Entstehung anderer Größen.

Durch die Bewegung der Linie aus sich heraus entsteht die Fläche. Bei dieser Bewegung wird aus jeder Lage des die ursprüngliche Linie erzeugenden Punktes wiederum eine Linie. Die Fläche hat daher zwei Dimensionen oder Ausdehnungen: Länge und Breite.

Durch die Bewegung der Fläche aus sich heraus entsteht der Körper. Hierbei wird aus jeder Punktlage der ursprünglichen Fläche eine Linie. Der Körper hat daher drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe.

Mit der Bewegung tritt die Richtung, die Beziehung der verschiedenen Lagen des erzeugenden Punktes zu einander, auf.

Bewegt sich ein Punkt in constanter d. h. unveränderter Richtung, so entsteht die gerade Linie. Verändert sich aber beständig die Richtung der Bewegung, so beschreibt der Punkt eine krumme Linie oder Curve. Bewegt sich die gerade Linie in constanter Richtung, so entsteht die Ebene. Aus der Entstehungsweise der Ebene ergibt sich, daß die gerade Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte derselben ganz in die Fläche fällt. Wir erhalten also die Definition: Die Ebene ist eine Fläche, in welche man nach allen Richtungen derselben eine gerade Linie ganz hinein legen kann, oder bei welcher die gerade Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte ganz in die Fläche fällt. Derjenige Theil der Geometrie, welcher sich mit Gebilden beschäftigt, welche in ein und derselben Ebene liegen, heißt ebene Geometrie oder Planimetrie.

§ 3.

Unter einer Definition oder Begriffsbestimmung versteht man die hinreichende und geordnete Angabe des Inhalts eines Begriffs, d. i. die Angabe der wesentlichen Merkmale, welche den Inhalt des Begriffs ausmachen. Einen Theil dieser Merkmale hat der zu definirende Begriff mit anderen Begriffen gemeinsam; durch das Hinzukommen des übrigen Theils dagegen unterscheidet er sich von allen anderen Begriffen; z. B. „Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel d. i. gleichgerichtet sind.“ Bei einer richtigen Definition kann man Subject und Prädikat vertauschen. Zudem soll die Definition nichts enthalten, was aus einem schon angeführten Merkmale mit Nothwendigkeit folgt.

Der Beweis ist die Darlegung des zureichenden Grundes.

Beweis und Definition fußen schließlich auf der Anschauung. Zu einer Definition gehört nämlich: 1) die Angabe des zunächst übergeord-

neten Begriffes, des genus proximum; 2) die Angabe der näheren Bestimmung, der differentia specifica, wodurch der zu definirende Begriff sich von den nebengeordneten Begriffen, die unter dasselbe genus proximum fallen, unterscheidet. Der übergeordnete oder höhere Begriff aber muß auch definirt werden. Hierzu ist wiederum der zunächst höhere Begriff nothwendig u. s. w. Man muß also schließlich zu etwas kommen, das sich nicht mehr definiren läßt, welches also, wofern es gewiß sein soll, in der Anschauung gegeben werden muß. Aehnlich verhält es sich bei dem Beweise. Bei demselben wird immer etwas als richtig vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist ebenfalls zu beweisen. Zu diesem Beweise ist wiederum eine Voraussetzung nöthig u. s. w. Man muß also schließlich zu etwas kommen, was sich nicht beweisen läßt, was also durch Anschauung gewiß sein muß.

Der Vortheil der Mathematik liegt nun hauptsächlich darin, daß die zu Grunde liegenden Anschauungen reine Anschauungen sind, d. i. unabhängig von der Erfahrung sind; sie ist eine Wissenschaft a priori, d. h. sie hat ihren Grund allein im Erkenntnißvermögen und nicht in der Erfahrung. Dagegen haben die empirischen Wissenschaften oder Wissenschaften a posteriori, z. B. die Naturwissenschaft, theilweise oder vollständig ihren Grund in der Erfahrung. Hieraus folgen die andern Vortheile der Mathematik: Einfachheit und genaue Begrenzung ihres Stoffes, Construirbarkeit ihrer Begriffe in der reinen Anschauung und schließlich unbedingte Nothwendigkeit und Allgemeinheit ihrer Sätze. Während z. B. die Naturwissenschaft die Naturkörper nach ihrer inneren und äußeren Beschaffenheit und ihren endlosen Beziehungen betrachtet, hat die Mathematik es nur mit der Größe als solcher zu thun, sie betrachtet den Körper nur in Rücksicht auf Rauminhalt und Form, es ist ihr aber gleichgültig, ob ein Körper aus diesen oder jenen Grundstoffen besteht.

§ 4.

Diejenigen Sätze, welche das Fundament der Wissenschaft sind, sich aber nicht beweisen lassen, sondern durch reine Anschauung gewiß sind, heißen Axiome oder Grundsätze. Dahin gehören:

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.
2. Zwischen zwei Punkten gibt es nur eine gerade Linie.
3. Gleiches kann für Gleiches gesetzt werden:

$$\begin{array}{r} A + B = C. \\ B = D. \\ \hline A + D = C. \end{array}$$

4. Das Ganze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich:

$$\frac{A,\ B,\ C,\ D,\ E \text{ sind die Theile von } F.}{F = A + B + C + D + E.}$$

Aus diesen Grundsätzen ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

5. Zwei Größen, welche einzeln derselben dritten Größe gleich sind, sind unter sich gleich:

$$\begin{array}{c} A = B. \\ B = C. \\ \hline A = C. \end{array}$$

6. Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches:

$$\begin{array}{c} A = B. \\ C = D. \\ \hline A + C = B + D. \end{array}$$

7. Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt Gleiches:

$$\begin{array}{c} A = B. \\ C = D. \\ \hline A - C = B - D. \end{array}$$

8. Gleiches mit Gleichem multiplizirt gibt Gleiches:

$$\begin{array}{c} A = B. \\ C = D. \\ \hline A \cdot C = B \cdot D. \end{array}$$

9. Gleiches durch Gleiches dividirt gibt Gleiches:

$$\begin{array}{c} A = B. \\ C = D. \\ \hline \frac{A}{C} = \frac{B}{D}. \end{array}$$

Außerdem erhalten wir noch:

10. Größeres um Gleiches vermehrt, um Gleiches vermindert, mit Gleichem multiplizirt, durch Gleiches dividirt, gibt Größeres:

$$\begin{array}{c} A > B \text{ (A größer als B).} \\ C = D. \\ \hline A + C > B + D. \\ A - C > B - D. \\ A \cdot C > B \cdot D. \\ \frac{A}{C} > \frac{B}{D}. \end{array}$$

11. Größeres zu Gleichem addirt gibt Größeres. Größeres von Gleichem subtrahirt gibt Kleineres. Gleiches mit Größerem multiplicirt gibt Größeres. Gleiches durch Größeres dividirt gibt Kleineres:

$$A = B.$$
$$C > D.$$
$$A + C > B + D.$$
$$A - C < B - D \text{ (kleiner als)}.$$
$$A \cdot C > B \cdot D.$$
$$\frac{A}{C} < \frac{B}{D}.$$

Erstes Kapitel.

Der Punkt, die Linie, und der Winkel.

§ 5.

Die Größe, der Gegenstand der Mathematik, hat zwei Momente (d. h. sie kann von zwei Seiten, in zweifacher Hinsicht betrachtet werden): die Größe im engeren Sinne oder die Quantität und die Form oder die Qualität. Mathematische Gebilde, die in ersterer Hinsicht übereinstimmen, heißen gleich (=); solche, welche dieselbe Form oder Gestalt haben, ähnlich (∼); dagegen diejenigen, welche in Beiden übereinstimmen, congruent (≅). Congruente Gebilde sind also gleich und ähnlich und unterscheiden sich daher durch nichts als durch ihre Lage.

Die Raumgebilde sind: 1) der Punkt; 2) die Linie; 3) die Fläche; 4) der Körper.

Der Punkt.

§ 6.

Der einzelne Punkt bietet als das Ausdehnungslose der Betrachtung keine Seite dar. Betrachten wir aber zwei Punkte, so ist ihre einfachste Beziehung die Richtung. Ein Punkt aber im Verein mit einer Richtung gibt die gerade Linie, die, wie sich unmittelbar aus der reinen Anschauung ergibt, das durch zwei Punkte bestimmte mathematische Gebilde ist. Das durch drei Punkte bestimmte mathematische Gebilde ist die Ebene, da durch zwei Punkte die die Ebene erzeugende Gerade und durch das Hinzukommen des dritten Punktes die Bewegungsrichtung der Geraden bestimmt ist.

Die Linie.

§ 7.

Es gibt gerade und krumme Linien (s. § 2).

Die gerade Linie ist entweder nach beiden Seiten begrenzt: die Strecke,

oder nach der einen Seite begrenzt, nach der anderen unbegrenzt: der Strahl, oder nach beiden Seiten unbegrenzt: die gerade Linie im engeren Sinne, die wir die Gerade nennen wollen. Die beiden Seiten der geraden Linie, gerechnet vom Ausgangspunkt der erzeugenden Bewegung, werden von der erzeugenden Bewegung und der Rückbewegung hervorgebracht. Eine Linie, welche aus mehreren Strecken von verschiedener Richtung besteht, heißt gebrochene Linie.

Während die gerade Linie durch Ausgangspunkt und Richtung der erzeugenden Bewegung bestimmt ist, muß bei der Entstehung der krummen Linie oder Curve zu dem Ausgangspunkt und der Anfangsrichtung der Bewegung noch das Gesetz der Richtungsänderung hinzukommen. Es gibt daher unendlich viele Curven von verschiedener Gestalt. Hiervon betrachten wir nur die Kreislinie; dieselbe ist eine Art der Ellipse. Eine Ellipse ist eine ebene Curve (in ein und derselben Ebene gelegene krumme Linie), bei welcher die Summe der Entfernungen PF und PF′ eines jeden ihrer Punkte P von zwei gegebenen Punkten F und F′ eine constante Größe AB ist. F und F′ heißen Brennpunkte, M oder die Mitte von FF′ und von AB heißt Mittelpunkt, AB große und die in M auf AB senkrechte CD kleine Axe der Ellipse, die gerade Verbindungslinie PF eines Punktes der Ellipse mit einem Brennpunkte Radius vector. Es ist also: PF + PF′ = P′F + P′F′ = AB. Man kann die Ellipse auf folgende Weise construiren: In den beiden Brennpunkten F und F′ befestigte man zwei Stifte, lege um dieselben einen geschlossenen Faden, der gleich FF′ + AB. Alsdann führe man einen den Faden spannenden Zeichenstift um die Brennpunkte herum. Wenn die beiden Brennpunkte F und F′ in einen Punkt zusammenfallen, so geht die Ellipse in eine Kreislinie über. Eine Kreislinie ist mithin eine ebene geschlossene Curve, deren sämmtliche Punkte von einem Punkte, dem Mittelpunkte, dieselbe Entfernung haben. Der Kreis oder die Kreisfläche entsteht dadurch, daß sich eine Strecke um einen ihrer Endpunkte in derselben Ebene bleibend dreht, bis sie in die ursprüngliche Lage zurückkehrt (Fig. 2). Die den Kreis erzeugende Strecke

Fig. 1.

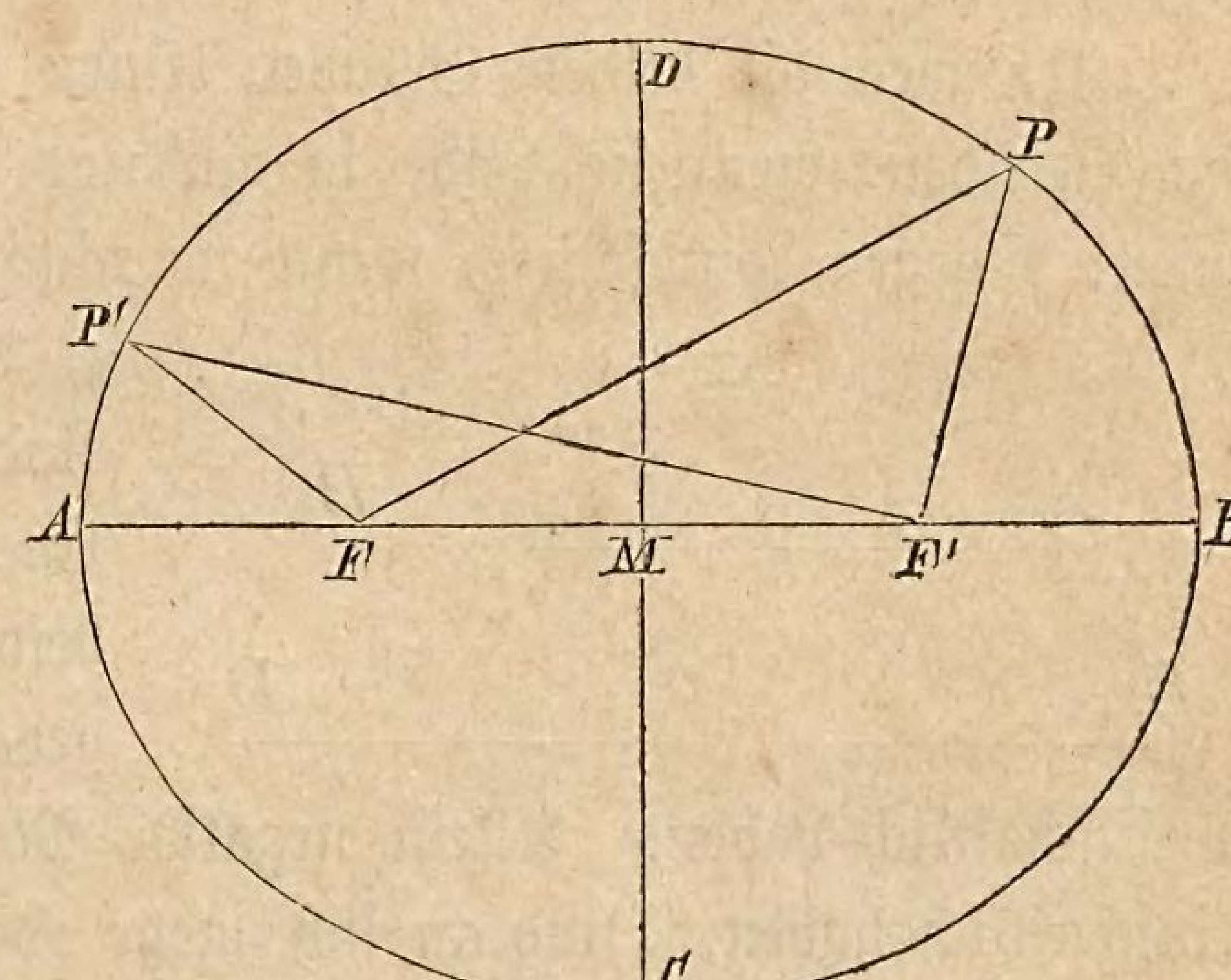
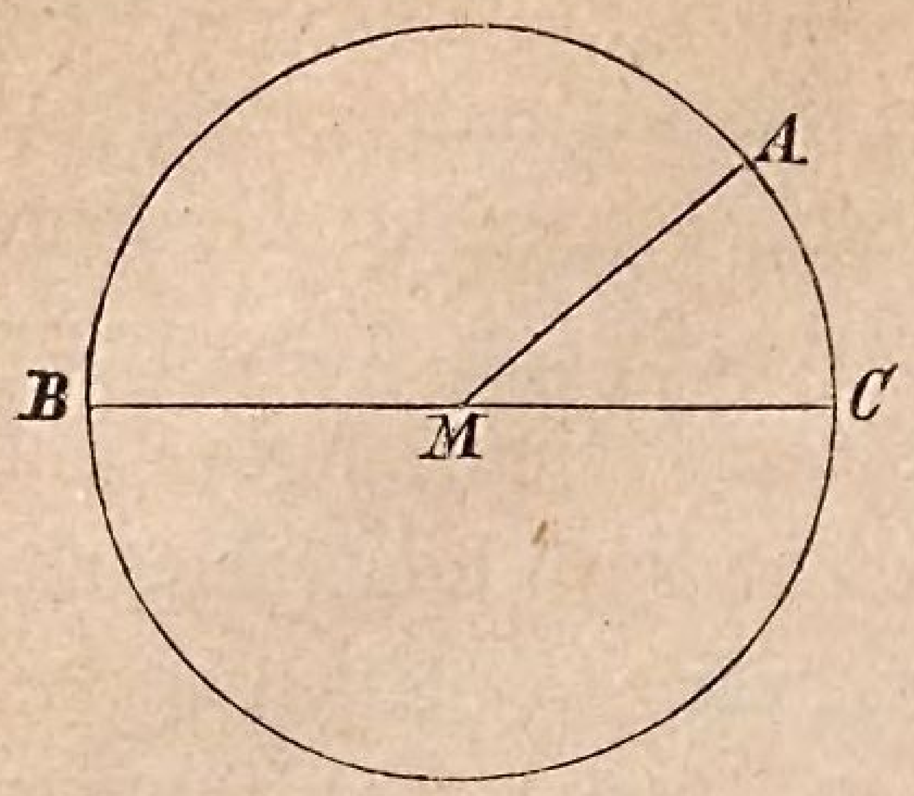


Fig. 2.



MA heißt Radius oder Halbmesser, der feste Punkt M Mittelpunkt des Kreises, eine durch den Mittelpunkt gehende, von der Kreislinie begrenzte Strecke heißt Durchmesser und ist dem doppelten Radius gleich. Alle Radien des Kreises sind als verschiedene Lagen derselben Strecke MA einander gleich.

Beziehungen zweier geraden Linien gegen einander.

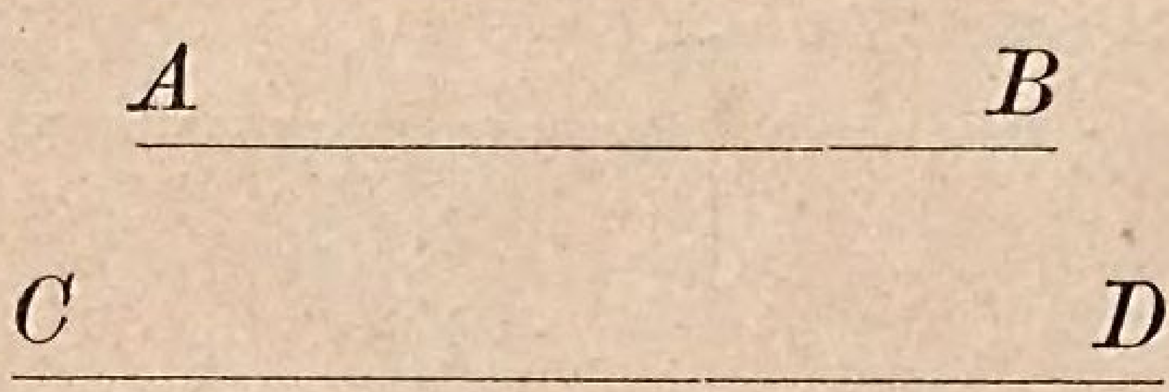
§ 8.

Da die gerade Linie durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und eine Richtung bestimmt ist, so sind zwei Betrachtungsweisen möglich:

Erstens: Die beiden Geraden haben a) keinen, b) einen, c) zwei oder mehr Punkte gemeinschaftlich.

a) Haben die beiden Geraden keinen Punkt gemeinschaftlich, so nennt man dieselben, wenn sie beide in ein und derselben Ebene liegen, parallele Linien, dagegen windschiefe, wenn sie nicht in derselben Ebene liegen;

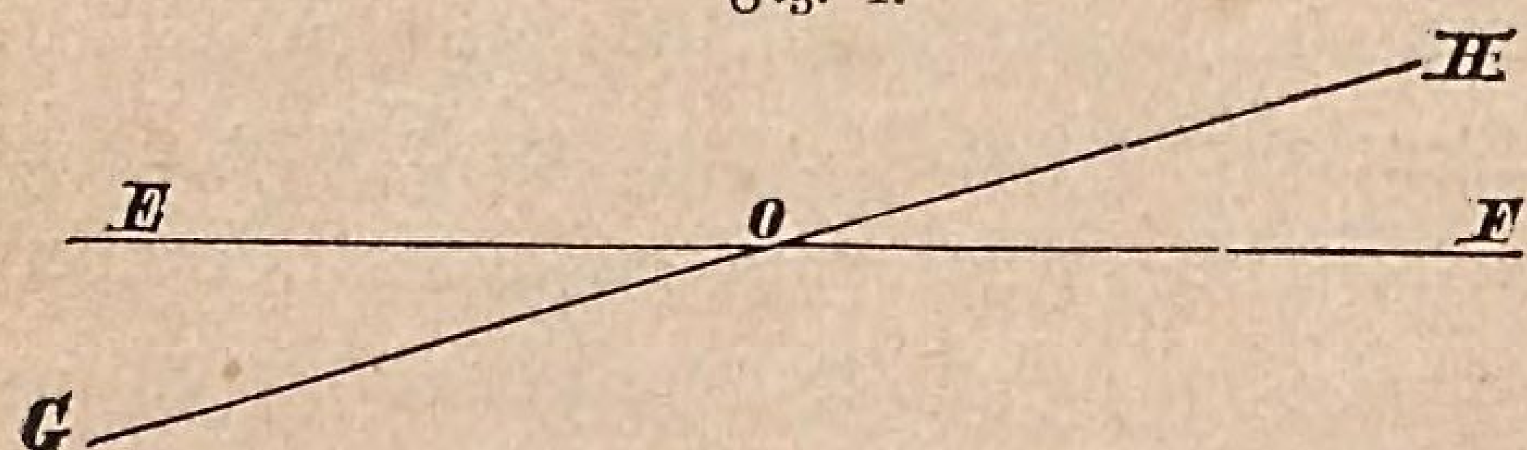
Fig. 3.



z. B. die Geraden AB und CD sind parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und, obwohl sie nach beiden Seiten endlos weiter gehend gedacht werden müssen, keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Allein negative Merkmale, wie „keinen Punkt gemeinschaftlich haben," sind an sich mehr oder weniger unfruchtbar, während positive sich mehr zur Quelle neuer Folgerungen eignen. Wir werden daher die andere Betrachtungsweise vorziehen.

b) Haben die beiden Geraden nur einen Punkt gemeinschaftlich, so schneiden sie sich; z. B. die beiden Geraden EF und GH Fig. 4 haben nur den Punkt O gemeinschaftlich.

Fig. 4.



In diesem Falle haben die beiden Geraden verschiedene Richtungen und sind daher in Beziehung auf die Richtungen zu betrachten.

c) Haben die beiden Geraden zwei oder mehr Punkte gemeinschaftlich, so bilden sie eine einzige Gerade, da ja die Gerade durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist.

Die zweite, die fruchtbarere Betrachtungsweise, ist folgende:

Die Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und eine Richtung, in welchen Angaben das ganze Wesen der Geraden enthalten ist. — Es sind folgende Fälle möglich:

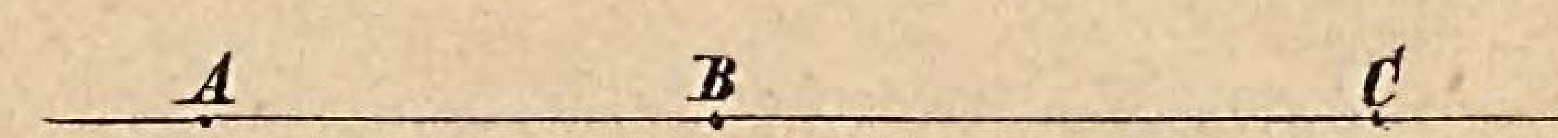
1) Der Ausgangspunkt der erzeugenden Bewegung ist beiden Geraden gemeinschaftlich.

2) Der Ausgangspunkt ist verschieden.

In jedem dieser beiden Fälle ist entweder die Richtung dieselbe oder verschieden.

a) Ausgangspunkt und Richtung sind beiden gemeinschaftlich; z. B. AB und AC Fig. 5 haben den Punkt A gemeinschaftlich, und die Richtungen AB und AC sind dieselbe Richtung.

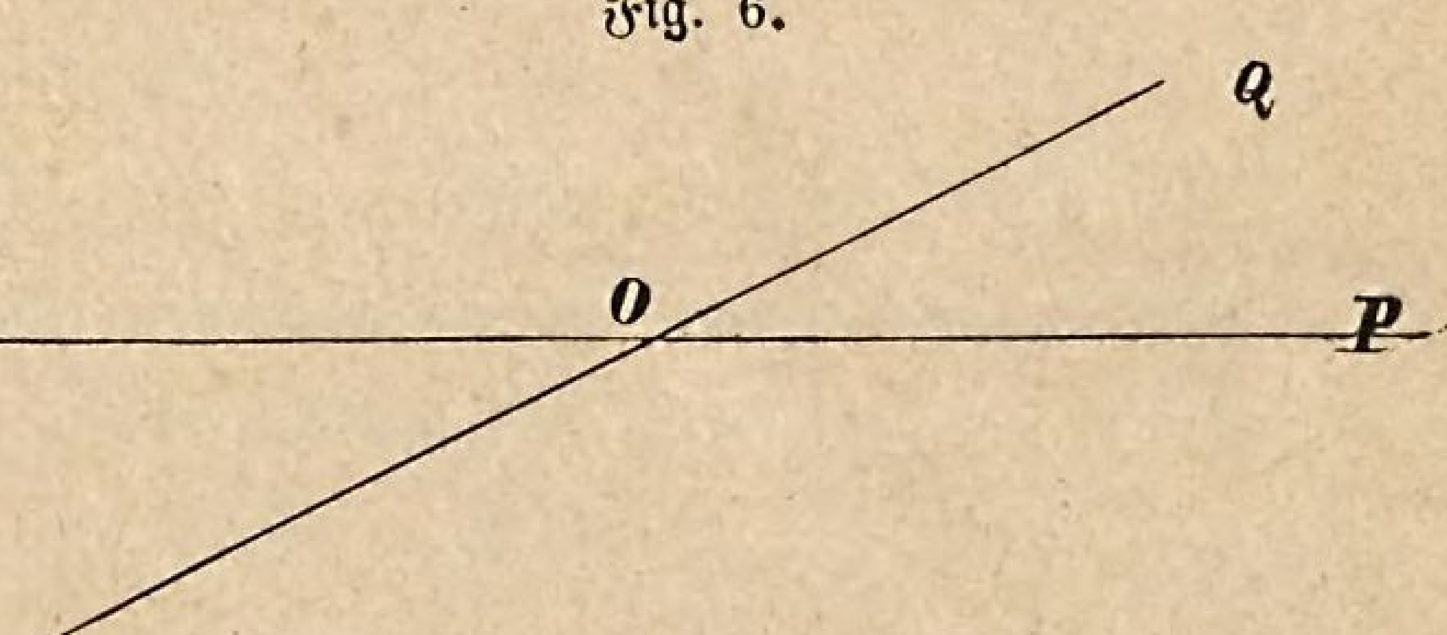
Fig. 5.



Da eine Gerade durch den Ausgangspunkt und die Richtung der erzeugenden Bewegung vollständig bestimmt ist, so bilden AB und AC eine einzige Gerade. Dieser Fall ist daher nicht weiter zu betrachten.

b) Der Ausgangspunkt ist derselbe, die Richtung ist verschieden, z. B. OP und OQ Fig. 6.

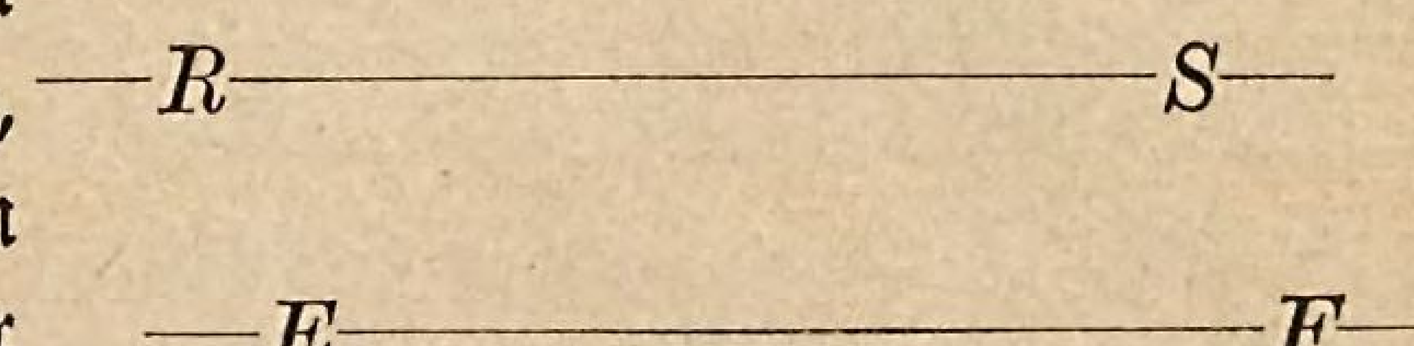
Fig. 6.



Die Verschiedenheit der Richtungen der sich schneidenden Geraden kann größer oder kleiner sein: wir haben eine unendliche Anzahl möglicher Lagenverhältnisse. Dieser Fall ist daher näher zu betrachten.

c) Der Ausgangspunkt ist verschieden, die Richtung dieselbe, z. B. RS und EF Fig. 7.

Fig. 7.

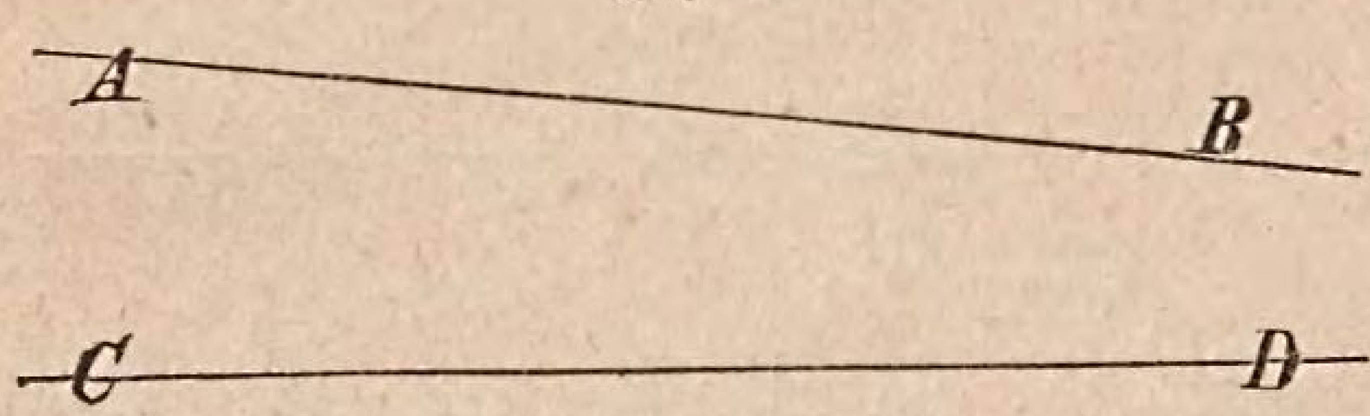


EF und RS haben dieselbe Richtung bedeutet, daß beide Geraden sich nur der Lage nach unterscheiden, so daß die Gerade EF, wenn sie in allen Punkten sich gleichmäßig über die Gerade ER gleitend bewegt, in demselben Augenblick die Lage RS bekömmt, wenn ein Punkt derselben in die Gerade RS fällt, d. h. alle Punkte fallen zu gleicher Zeit in RS. Hieraus ergiebt sich, daß die Geraden mit gleicher Richtung in derselben

Ebene liegen und, wofern sie nicht ganz zusammen fallen, keinen Punkt gemeinschaftlich haben, sich also nicht schneiden können. Es läßt sich dieses leicht indirekt beweisen. Würden die beiden Geraden RS und EF einen Punkt gemeinschaftlich haben, so stimmten sie überein in einem Punkte und der Richtung, bildeten also nach a) eine einzige Gerade. **Gerade Linien, welche dieselbe Richtung haben, heißen Parallelen. Dagegen wollen wir Linien mit entgegengesetzter Richtung antiparallel nennen.** Das Zeichen für parallel ist ⫲, als Zeichen für antiparallel wollen wir ∠ einführen. Es ist also RS ⫲ EF und SR ⫲ FE, dagegen RS ∠ FE, SR ∠ EF, desgleichen RS ∠ SR und EF ∠ FE.

d) Ausgangspunkt und Richtung sind verschieden, z. B. AB und CD Fig. 8.

Fig. 8.



Solche Linien nähern sich nach der einen Seite (convergiren), während sie nach der anderen immer mehr auseinandergehen (divergiren). Betrachten wir nun den Fall b).

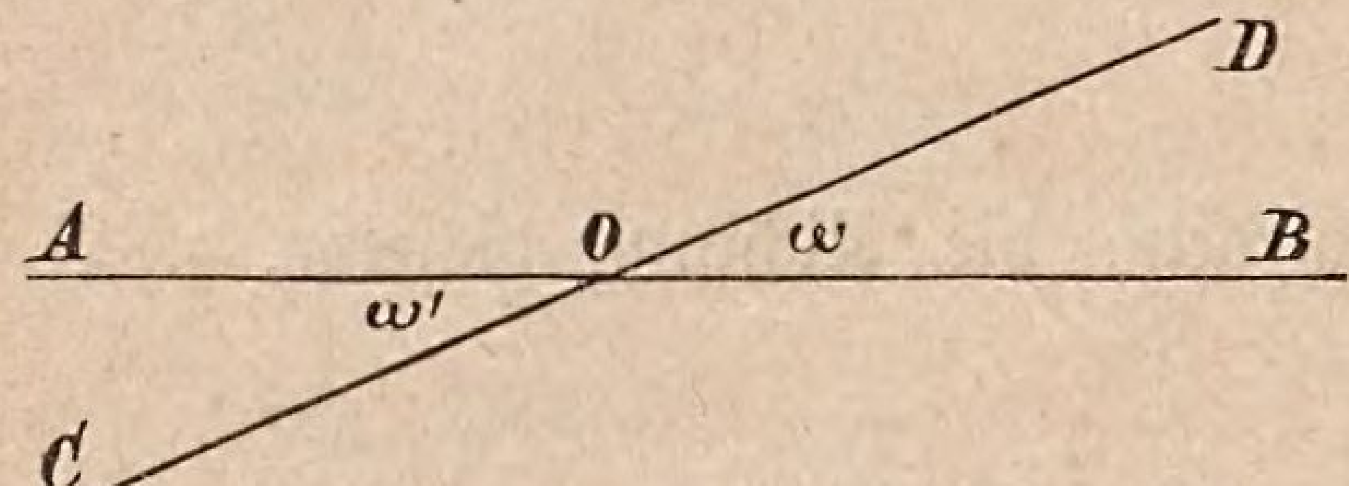
Zwei sich schneidende Geraden, der Winkel.

A. Entstehung und Erklärung der Winkel.

§ 9.

Alle möglichen Beziehungen zweier sich schneidenden Geraden zu einander werden erhalten, wenn sich eine Gerade um einen ihrer Punkte dreht, bis sie in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Die Gerade AB Fig. 9

Fig. 9.



drehe sich (in derselben Ebene bleibend) um den festen Punkt O. Bei dieser Drehung verändert sie beständig ihre Richtung, welche Richtungsänderung von der Größe der Drehung abhängt. Betrachten wir die Gerade in einer beliebigen neuen Lage CD. Dieselbe mußte eine bestimmte Drehung erleiden, um aus der Lage AB in die Lage CD zu kommen. Der Richtungsunterschied zwischen der Richtung AB und der Richtung CD, welcher der Größe der Drehung entspricht, wird Winkel BOD oder ∢ BOD oder ∢ DOB genannt. Wir erhalten also die Definition: **Unter einem Winkel versteht man den Richtungsunterschied zweier sich schneidenden Geraden (als Drehungsgröße).** Der Durchschnittspunkt (O) wird Scheitel, die den Winkel bildenden Strahlen (OB und OD) werden Schenkel des Winkels

genannt. Der Winkel wird gewöhnlich durch drei Buchstaben bezeichnet, wobei der Scheitelbuchstabe in der Mitte stehen muß und die beiden anderen auf den Schenkeln liegen, oder durch den Scheitelbuchstaben allein, oder durch einen in den Winkel hinein geschriebenen Buchstaben (ω Fig. 9). Die Bezeichnung durch den Scheitelbuchstaben ist zweideutig und daher unstatthaft, wenn derselbe Scheitel mehreren Winkeln gemeinschaftlich ist. Also Fig. 9: $\sphericalangle$ BOD oder $\sphericalangle$ DOB oder ω, hier nicht $\sphericalangle$ O.

Wenn AB sich dreht bis in die Richtung CD, so beschreibt OB den Winkel DOB oder ω, dagegen die OB entgegengesetzte Richtung OA den Winkel AOC oder ω'. Für beide Winkel ist also die Größe der Drehung, mithin die Richtungsänderung dieselbe, d. h. $\omega = \omega'$.

Wenn man AB über die Lage CD hinausdreht, so kommt sie schließlich in die entgegengesetzte Richtung: OB fällt in OA und OA in OB. Während aber OB den Winkel BOA (die Drehung nach oben von links nach rechts gerechnet) beschreibt, beschreibt OA den Winkel AOB (die Drehung nach unten von links nach rechts gerechnet). Mithin sind die beiden Winkel einander gleich.

Wenn die Gerade OB sich dreht bis in die Lage OA, so beschreibt sie den Winkel BOD und dann DOA, aber auch den Winkel BOA. Mithin ist $\sphericalangle$ BOA = BOD + DOA.

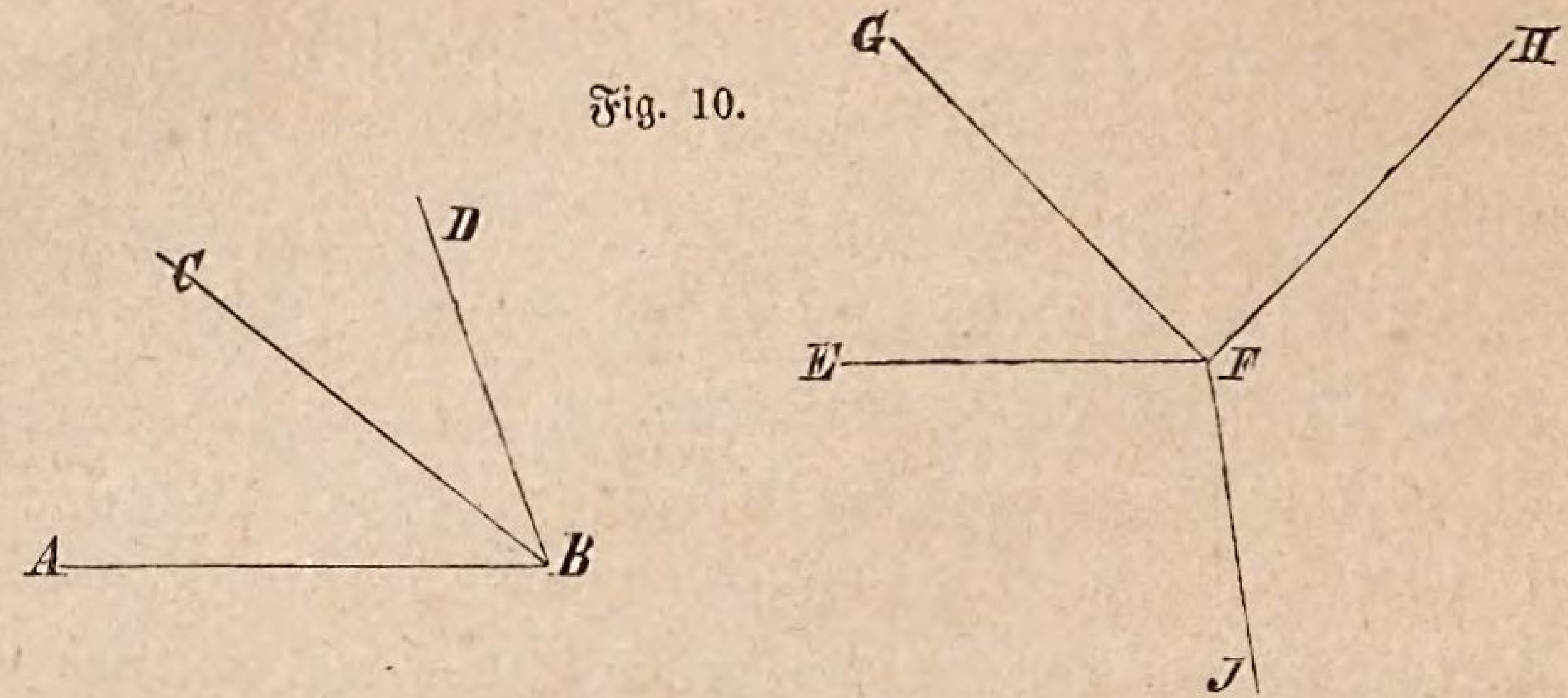
$\sphericalangle$ BOA ist der Richtungsunterschied zwischen der Richtung OB und der entgegengesetzten Richtung OA. Ein solcher Winkel wird gestreckter oder flacher Winkel genannt. Mithin: **Unter einem gestreckten oder flachen Winkel versteht man einen Winkel, dessen Schenkel sich in entgegengesetzter Richtung erstrecken (mithin eine einzige Gerade bilden).** — Die Hälfte eines gestreckten Winkels wird rechter Winkel genannt und mit R bezeichnet. Der gestreckte Winkel ist also gleich zwei Rechten.

$\sphericalangle$ BOD und $\sphericalangle$ DOA haben den Scheitel O und den Schenkel OD gemeinschaftlich, und die nicht gemeinschaftlichen Schenkel OB und OA erstrecken sich in entgegengesetzter Richtung. Solche Winkel heißen Nebenwinkel. Mithin: **Unter Nebenwinkeln versteht man zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren nicht gemeinschaftliche Schenkel sich in entgegengesetzter Richtung erstrecken.**

$\sphericalangle$ BOD und $\sphericalangle$ AOC Fig. 9 haben den Scheitel O gemeinschaftlich, und die Schenkel des einen Winkels haben die entgegengesetzte Richtung der Schenkel des anderen. Solche Winkel heißen Scheitelwinkel. Mithin: **Scheitelwinkel sind Winkel, die den Scheitel gemeinschaftlich haben, und deren Schenkel sich in entgegengesetzter Richtung erstrecken.** Wenn also

zwei Geraden sich schneiden, so heißen von den vier Winkeln je zwei neben einander liegende Nebenwinkel, und je zwei sich gegenüber liegende Scheitelwinkel. Dagegen sind Fig. 10 die anliegenden Winkel ABC und CBD

Fig. 10.



keine Nebenwinkel, und die anstoßenden Winkel EFG und HFJ keine Scheitelwinkel.

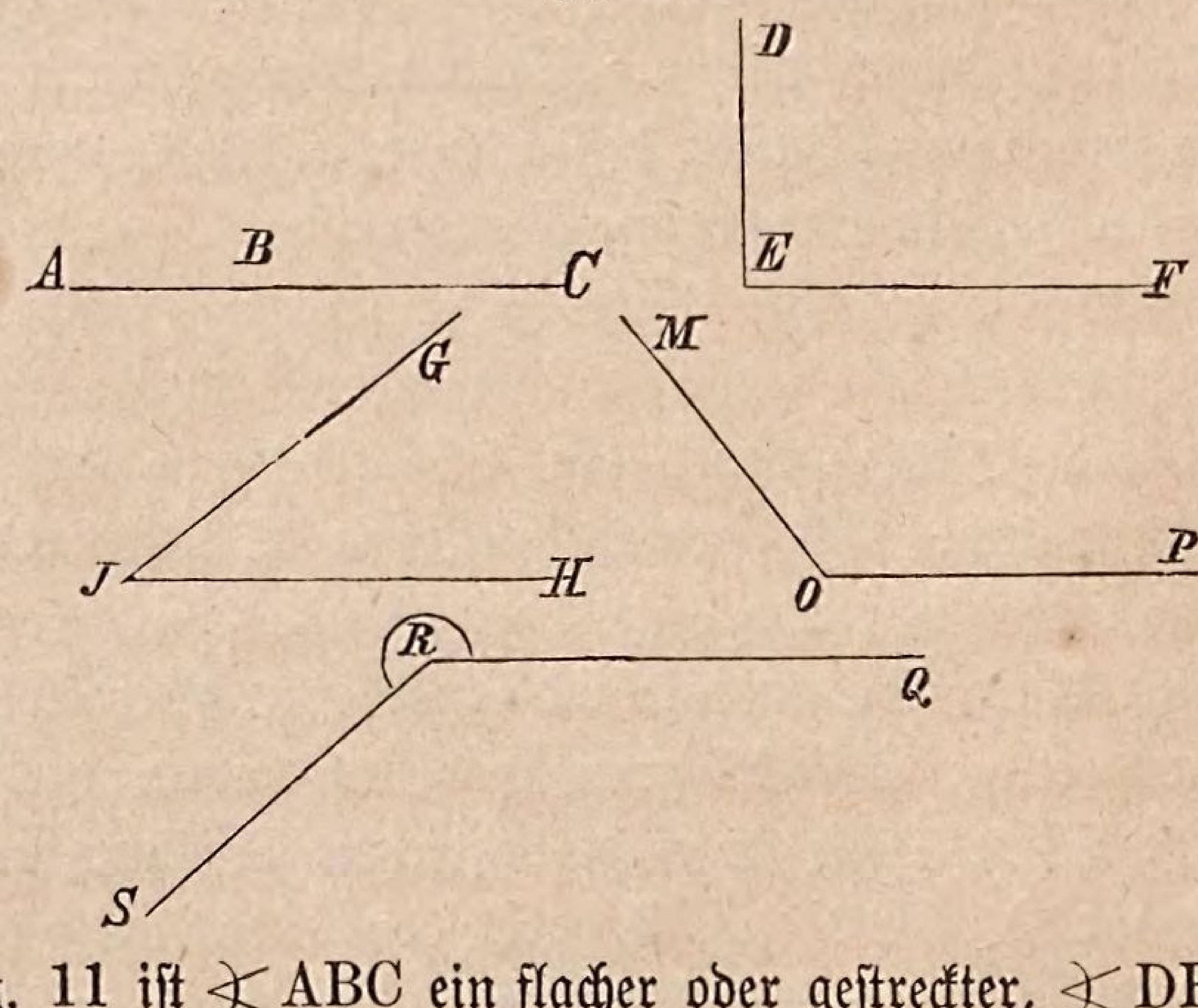
Ein spitzer Winkel ist ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter Winkel ist.

Ein stumpfer Winkel ist ein Winkel, welcher größer als ein rechter Winkel, aber kleiner als ein flacher (gestreckter) ist.

Ein überstumpfer, convexer oder erhabener Winkel ist ein Winkel, welcher größer als ein flacher Winkel ist.

Ein hohler oder convexer Winkel ist ein Winkel, welcher kleiner als ein flacher Winkel ist.

Fig. 11.



In Fig. 11 ist ∡ABC ein flacher oder gestreckter, ∡DEF ein rechter, ∡GJH ein spitzer, ∡MOP ein stumpfer, ∡SRQ ein erhabener oder convexer oder überstumpfer Winkel; die Winkel GJH, DEF und MOP oder ∡E, ∡J, ∡O sind hohle oder concave Winkel.

Zwei Winkel, deren Summe gleich 2 R ist, heißen supplementar.
Zwei Winkel, deren Summe gleich R ist, heißen complementar.
Ein Grad (1^0) ist der 90ste Theil eines rechten Winkels.
Eine Minute ($1'$) ist der 60ste Theil eines Grades.
Eine Sekunde ($1''$) ist der 60ste Theil einer Minute.
Es ist also $R = 90^0$; $1^0 = 60'$; $1' = 60''$.

B. Lehrsätze über die Winkel.

§ 10.

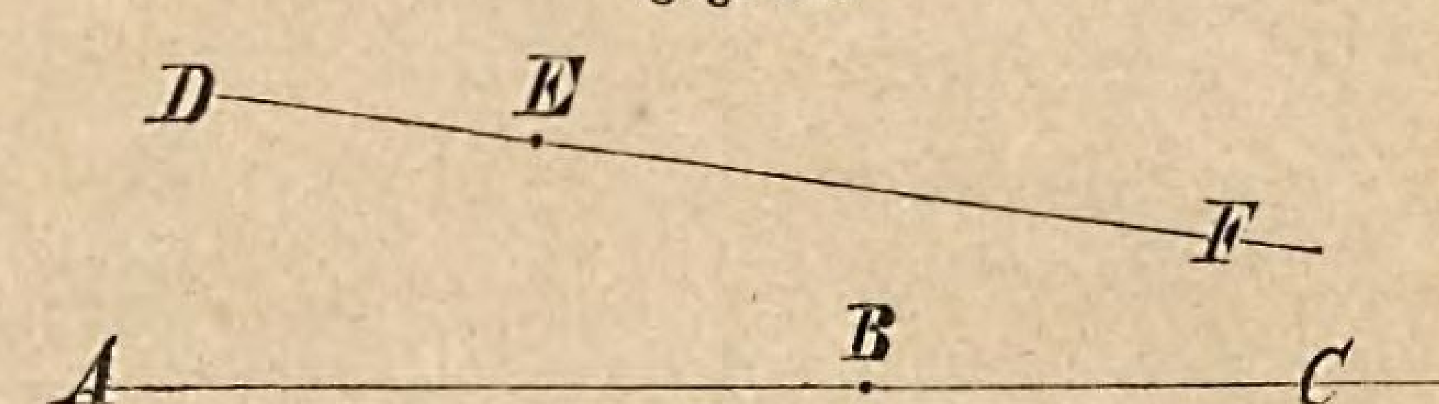
Die Größe der Drehung einer Geraden bis in die entgegengesetzte Richtung ist unabhängig von der ursprünglichen Lage der Geraden und des Drehungspunktes auf derselben. Wir erhalten daher den Lehrsatz:

1. Alle flachen Winkel sind einander gleich.

Voraussetzung: ∢ ABC (Fig. 12) und
∢ DEF sind flache Winkel.

Behauptung: ∢ ABC = DEF.

Fig. 12.



Beweis: Nach der Voraussetzung sind ∢ ABC und ∢ DEF flache Winkel. Mithin sind die Linien ABC und DEF gerade Linien. Legen wir nun ∢ DEF so auf ∢ ABC, daß der Scheitel E in den Scheitel B fällt, und geben ED die Richtung von BA, so muß EF die Richtung von BC nehmen, weil gerade Linien, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, ganz in einander fallen; folglich sind die flachen Winkel einander gleich.

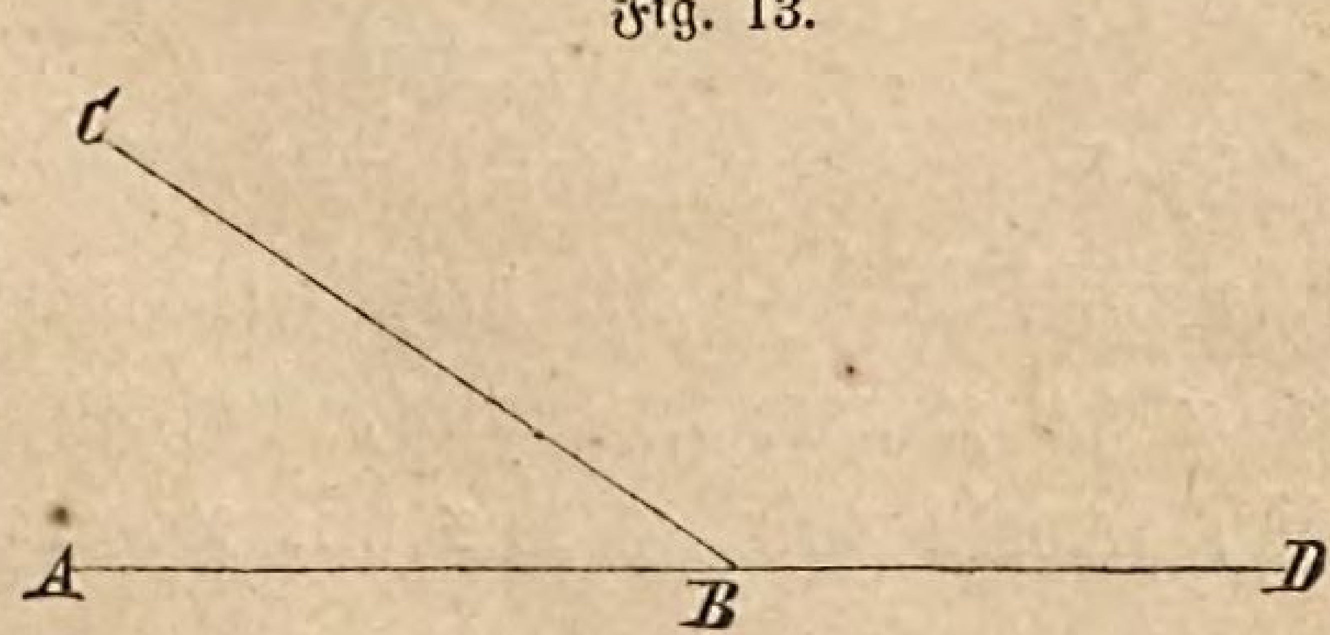
Sind aber alle flachen Winkel einander gleich, so sind es auch ihre Hälften. Wir erhalten daher den Lehrsatz:

Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Wenn eine Gerade durch Drehung einen flachen Winkel beschreibt, so ist die Größe der Drehung dieselbe, als wenn sie zwei Nebenwinkel beschreibt. Da nun nach der Definition vom rechten Winkel der flache Winkel gleich zwei Rechten ist, so erhalten wir den Lehrsatz:

2. Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Fig. 13.

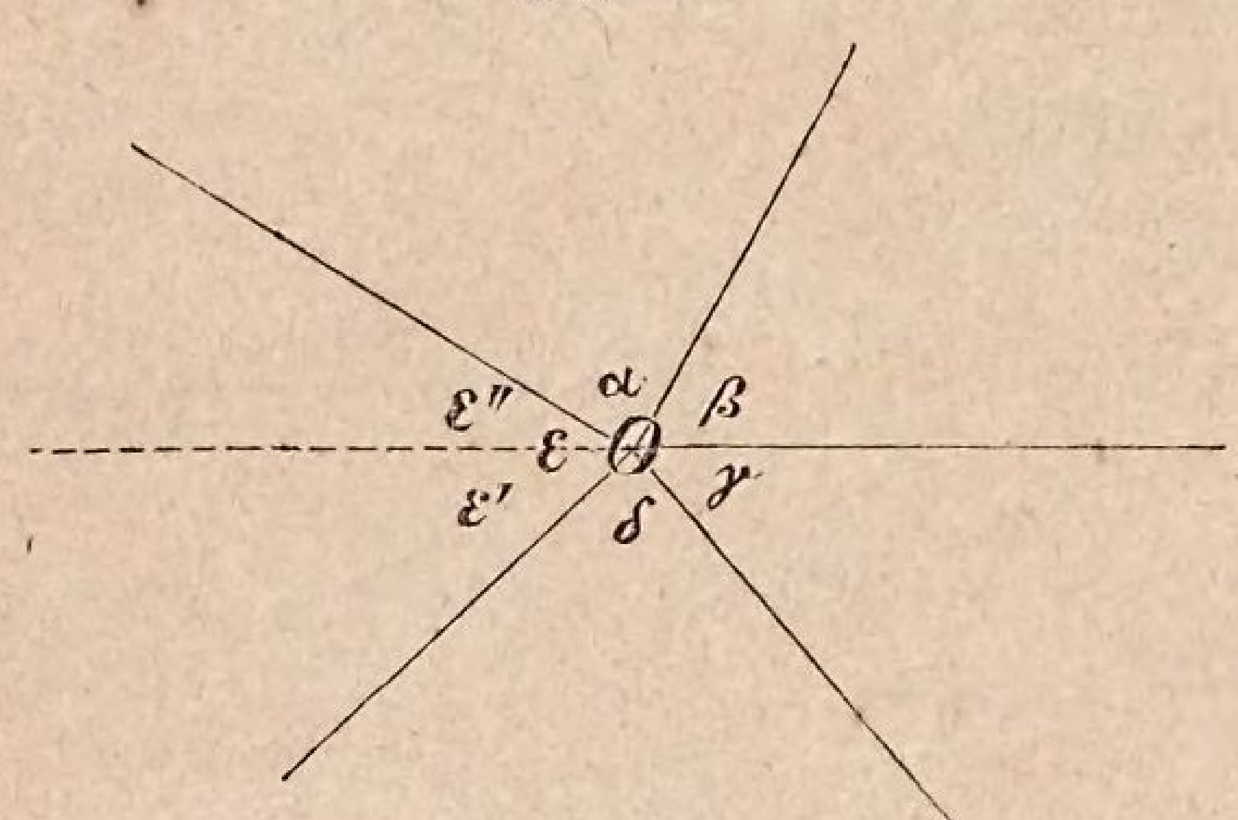


Vorauss. $\sphericalangle$ ABC Nebenwinkel von $\sphericalangle$ CBD (Fig. 13).
Beh. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 2R$.
Bew. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = ABD$.
$\sphericalangle ABD = 2R$ (als flacher Winkel).

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 2R$ (§ 4,5).

Wenn sich die Gerade BD (Fig. 13) um B dreht bis in die Richtung BA, so hat sie einen flachen Winkel beschrieben. Dreht sie sich nun weiter bis in die ursprüngliche Richtung BD, so beschreibt sie nochmals einen flachen Winkel. Also beschreibt eine Gerade bei einer vollen Umdrehung 4 R. Wir erhalten daher den Lehrsatz:

Fig. 14.



3. Die Summe der Winkel um einen Punkt herum beträgt 4 R. (Fig. 14).

Vorauss. α, β, γ, δ, ε sind sämmtliche Winkel um O.

Beh. $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 4R$.

Bew. Ich verlängere einen Schenkel über den Scheitel O hinaus. Dadurch wird ε in ε' und ε'' getheilt. Nun ist:

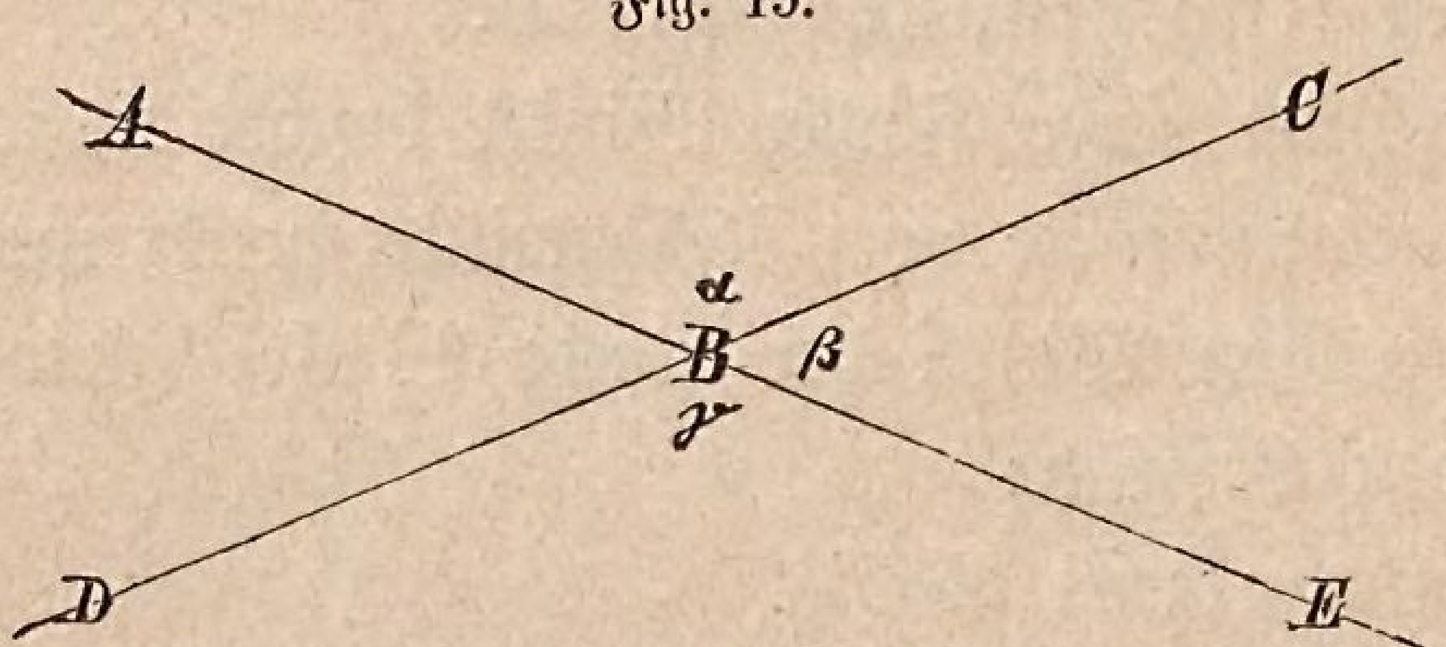
$\varepsilon'' + \alpha + \beta = 2R$ } weil sie einem flachen
$\varepsilon' + \delta + \gamma = 2R$ } Winkel gleich sind.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon' + \varepsilon'' = 4R$ (§ 4, 6).
$\varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 4R$ (§ 4, 3).

Wenn (Fig. 15) die Gerade DC sich um B dreht, bis sie in die Lage EA kommt, so beschreibt BC den Winkel α und BD den Winkel γ. α und γ sind also durch gleiche Drehung entstanden, es ist also $\alpha = \gamma$. Scheitelwinkel sind also einander gleich. Diesen Lehrsatz kann man auch auf folgende Weise finden:

Fig. 15.



α und γ (Fig. 15) sind Scheitelwinkel und sollen mit einander verglichen werden. Da sie nicht leicht direkt verglichen werden können, man nicht unmittelbar von α zu γ kommen kann, so muß eine Hülfsgröße benutzt werden, die sich sowohl mit α wie mit γ vergleichen läßt. Als

solche eignet sich Winkel β. Dieser ist der Nebenwinkel sowohl von α als von γ. Winkel β beträgt also mit α soviel, wie mit γ. Folglich müssen α und γ gleich sein. Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Scheitelwinkel sind einander gleich. (Fig. 15).

Vorauss. α Scheitelwinkel von γ.

Beh. $\alpha = \gamma$.

Bew. $\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta = 2\,\mathrm{R} \\ \gamma + \beta = 2\,\mathrm{R} \end{array}\right\}$ als Nebenwinkel

$\alpha + \beta = \gamma + \beta$ (§ 4, 5).

Mithin $\alpha = \gamma$.

Die vorhergehenden Sätze lassen sich kurz auf folgende Weise begründen:

Alle flachen Winkel sind gleich, weil sie durch gleich große Drehungen entstehen.

Nebenwinkel betragen zusammen 2 R, weil sie zusammen genommen einem flachen Winkel gleich sind, dieser aber gleich 2 R ist.

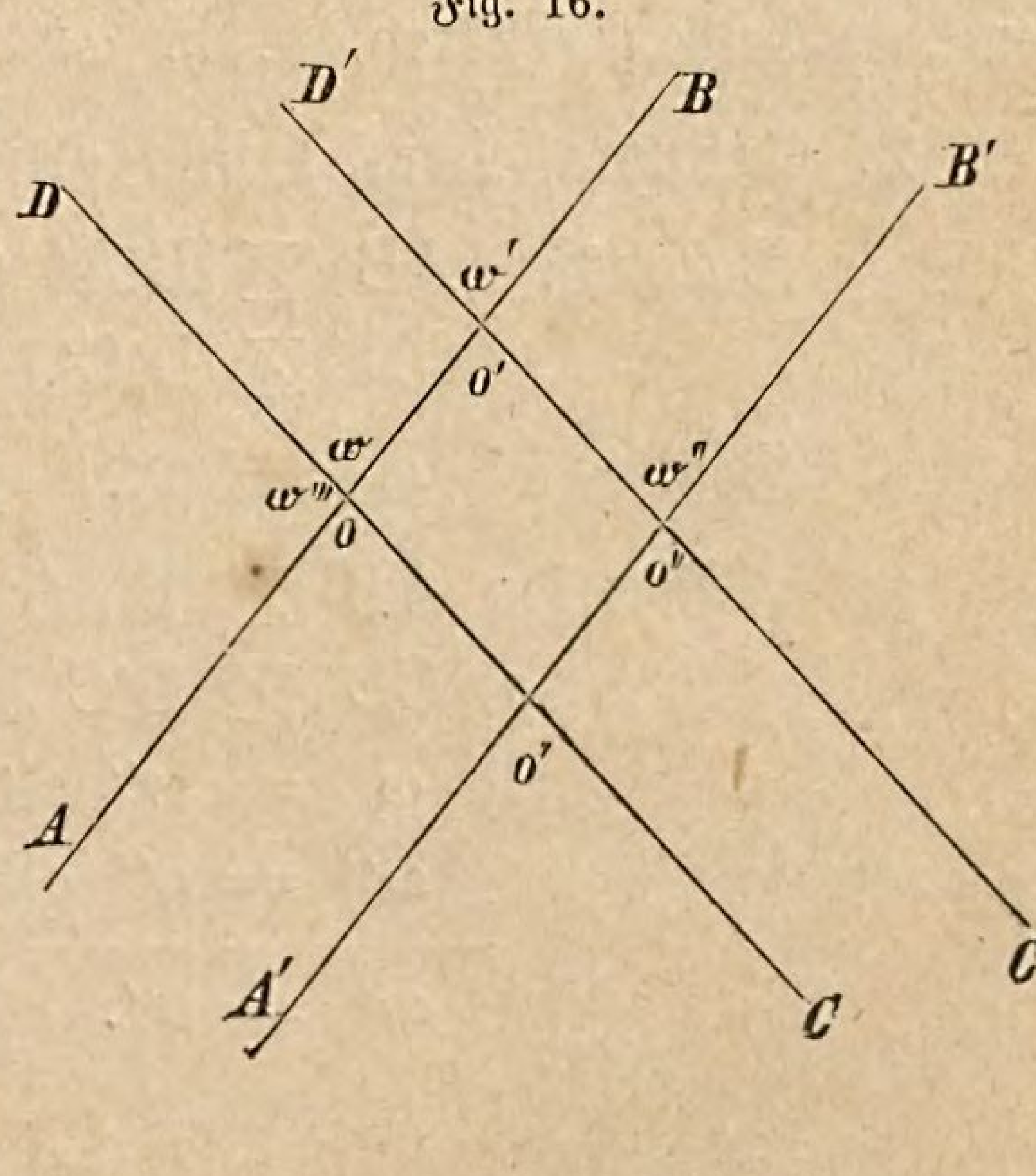
Die Winkel rings um einen Punkt herum betragen 4 R, weil sie zwei flachen Winkeln gleich sind.

Scheitelwinkel sind einander gleich, weil sie durch gleich große Drehungen entstehen, oder auch, weil sie einen gemeinschaftlichen Nebenwinkel haben.

§ 11.

Da der Winkel der Richtungsunterschied zweier Richtungen ist, so wird die Größe desselben nicht geändert, wenn man einen oder beide Schenkel parallel mit sich selbst, d. h. ohne ihre Richtungen zu ändern, verschiebt.

Fig. 16.



Verschiebt man (Fig. 16) den Schenkel CD des Winkels ω parallel mit sich selbst bis in die Lage C′D′, so ist $\omega' = \omega$ als Richtungsunterschiede derselben Richtungen. Ebenso o = o′. Verschiebt man nun auch den Schenkel AB des Winkels ω parallel mit sich selbst bis in die Lage A′B′, so ist $\omega'' = \omega' = \omega$, und o″ = o′ = o = ω. Die Winkel ω'' und ω sind Winkel mit parallelen Schenkeln, die wir Parallel-

winkel nennen wollen; die Winkel o'' und ω sind Winkel mit antiparallelen (entgegengesetzt gerichteten) Schenkeln, die wir Antiparallelwinkel nennen werden. Wir erhalten also die Lehrsätze: „Parallelwinkel sind einander gleich", und „Antiparallelwinkel sind einander gleich."

$\omega''' + \omega = 2\,R$, mithin auch $\omega''' + \omega''$. Nun sind bei den Winkeln ω''' und ω'' die Schenkel CD und C'D' parallel, dagegen die Schenkel BA und A'B' antiparallel. Solche Winkel wollen wir gemischte Parallelwinkel nennen. Wir erhalten also den Lehrsatz: „Gemischte Parallelwinkel sind supplementar."

Definitionen: Unter Parallelwinkeln versteht man Winkel, deren Schenkel parallel oder gleich gerichtet sind.

Unter Antiparallelwinkeln versteht man Winkel, deren Schenkel antiparallel, d. h. entgegengesetzt gerichtet sind.

Unter gemischten Parallelwinkeln versteht man Winkel, bei welchen ein Schenkelpaar parallel, dagegen das andere Schenkelpaar antiparallel ist.

Von den genannten Winkeln gelten also folgende Lehrsätze:

1. Parallelwinkel sind gleich (Fig. 16).

Voraussf. $CD \;\#\; C'D'$,
$AB \;\#\; A'B'$.
Beh. $\omega = \omega''$.

Bew. Der Winkel ω ist der Richtungsunterschied zwischen der Richtung AB und der Richtung CD. Der Winkel ω'' ist der Richtungsunterschied zwischen Richtung A'B' und C'D'. Die beiden letzteren Richtungen sind aber nach der Voraussetzung dieselben wie die beiden ersteren, folglich ist auch der Richtungsunterschied der beiden letzteren Richtungen gleich dem der beiden ersteren, d. h. $\omega'' = \omega$.

2. Antiparallelwinkel sind gleich (Fig. 16).

Voraussf. $AB \;\overline{\angle}\; B'A'$ (antiparallel),
$CD \;\overline{\angle}\; D'C'$.
Beh. $\omega = o''$.

Bew. Da $AB \;\overline{\angle}\; B'A'$, so ist $AB \;\#\; A'B'$; und da $CD \;\overline{\angle}\; D'C'$, so ist $CD \;\#\; C'D'$; mithin ist $\omega = \omega''$ als Parallelwinkel. Es ist aber
$\omega'' = o''$ als Scheitelwinkel.

$$\omega = o''.$$

3. Gemischte Parallelwinkel sind supplementar (Fig. 16).

Vorauss. $CD \mathrel{+\!\!\!\!\,\mid} C'D'$,

$BA \angle A'B'$.

Beh. $\omega''' + \omega'' = 2$ R.

Bew. Da $BA \angle A'B'$, so ist $AB \mathrel{+\!\!\!\!\,\mid} A'B'$. Da außerdem $CD \mathrel{+\!\!\!\!\,\mid} C'D'$, so ist $\omega = \omega''$ als Parallelwinkel. Es ist aber

$\omega + \omega''' = 2$ R als Nebenwinkel; mithin auch

$\omega'' + \omega''' = 2$ R.

Da Nebenwinkel gemischte Parallelwinkel und Scheitelwinkel Antiparallelwinkel sind, so ist § 10, 2 ein besonderer Fall von § 11, 3 und §. 10, 4 ein besonderer Fall von §. 11, 2.

Beziehungen dreier geraden Linien gegen einander.

§ 12.

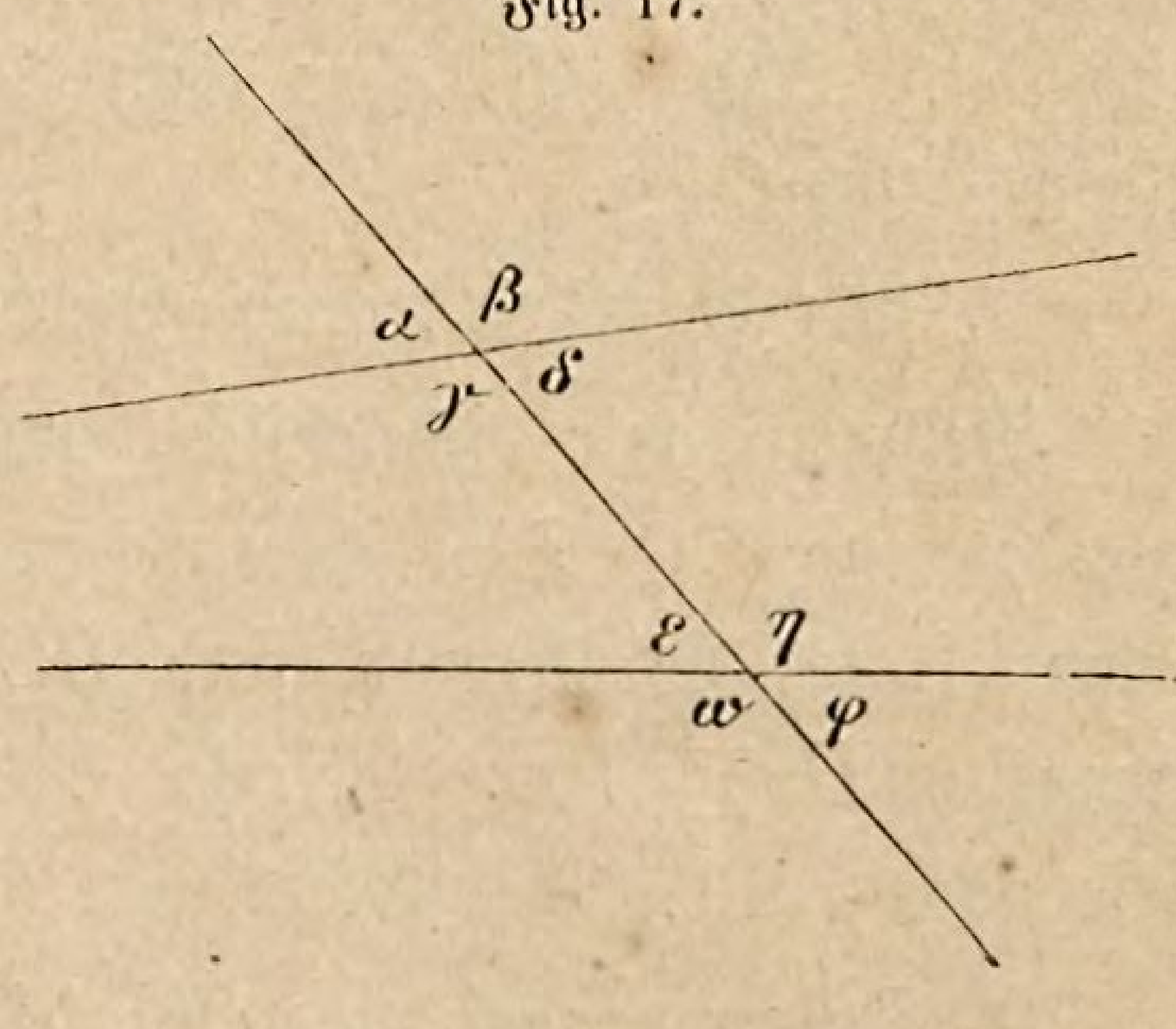
Diese Beziehungen zerfallen in solche, welche sich ergeben, wenn zwei Geraden von einer dritten durchschnitten werden, wobei die beiden Geschnittenen entweder sich nicht schneiden, oder das Durchschneiden doch nicht in Betracht gezogen wird, und in solche, welche sich ergeben, wenn alle drei sich gegenseitig durchschneiden.

Beziehungen dreier Geraden, insofern zwei von der dritten durchschnitten werden.

§ 13.

Wenn zwei Geraden sich schneiden, so entstehen vier Winkel: Nebenwinkel und Scheitelwinkel. Wenn daher zwei Geraden von einer dritten durchschnitten werden, so entstehen zwei Gruppen zu je vier Winkel. Wir vergleichen nun je einen Winkel der einen Gruppe mit je einem der anderen.

Fig. 17.



Die Winkelpaare (Fig. 17) α und ε, γ und ω, β und η, δ und φ liegen auf derselben Seite der geschnittenen Linien und auf derselben Seite der Schneidelinie; z. B. α liegt oberhalb der einen, ε oberhalb der anderen geschnittenen Linie; beide liegen links von der Schneidelinie. Solche Winkelpaare nennen wir correspondirende Winkel.

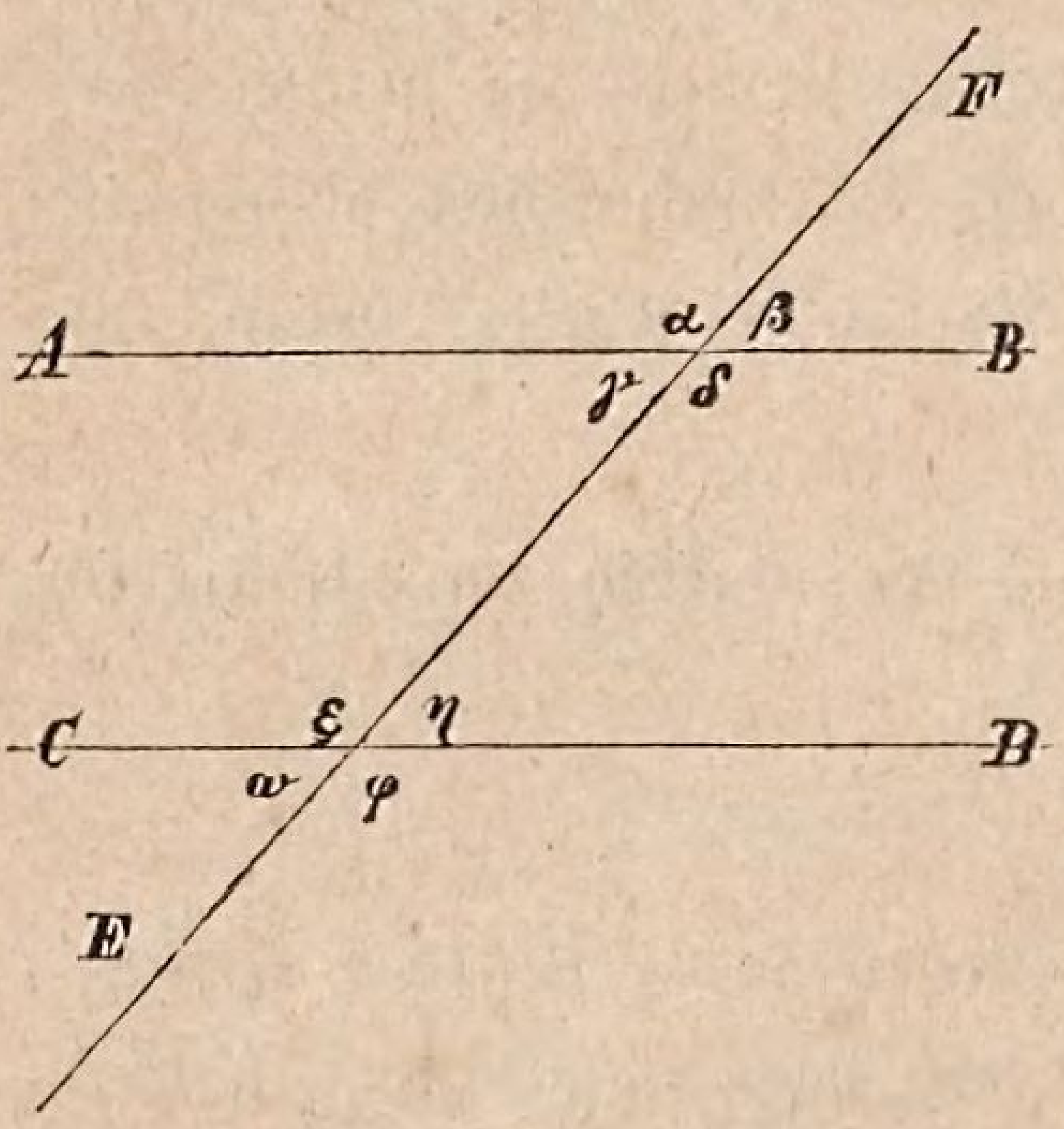
Die Winkelpaare α und φ, β und ω, γ und η, β und ε liegen auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien und auf verschiedenen Seiten der Schneidelinie. Diese Winkel werden Wechselwinkel genannt.

Die Winkelpaare α und ω, γ und ε, β und φ, δ und η liegen auf derselben Seite der Schneidelinie, aber auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien; z. B. β und δ liegen beide links von der Schneidelinie, dagegen liegt β oberhalb der einen und φ unterhalb der anderen geschnittenen Linie. Diese Winkel nennen wir zusammengehörige Winkel.

§ 14.

Um nun die Beziehungen der Winkel desselben Paares kennen zu lernen, betrachten wir den Fall, daß beide geschnittenen Geraden parallel sind.

Fig. 18.



In Figur 18 sei AB ǂ CD. Betrachten wir nun zwei corresp. Winkel, etwa β und η. Die Schenkel des Winkels β sind AB und EF, die Schenkel des Winkels η sind CD und EF. Da aber CD ǂ AB, und selbstverständlich EF ǂ EF, so sind β und η Parallelwinkel. Da aber n. § 11, 1 Parallelw. gleich sind, so erhalten wir den Lehrsatz:

1. Bei Parallelen sind die correspondirenden Winkel gleich.

Betrachten wir zwei Wechselwinkel, etwa α und φ (Fig. 18). α ist der Richtungsunterschied zwischen Richtung BA und Richtung EF. φ ist der Richtungsunterschied zwischen Richtung CD und Richtung FE. Nun ist aber BA Ƶ CD und EF Ƶ FE. Mithin sind α und φ Antiparallelwinkel. Da solche aber nach § 11, 2 einander gleich sind, so erhalten wir den Lehrsatz:

2. Bei Parallelen sind die Wechselwinkel gleich.

Nehmen wir schließlich zwei beliebige zusammengehörige Winkel, etwa γ und ε. Die Schenkel des Winkels γ sind BA und FE, die Schenkel des Winkels ε sind DC und EF. Nun ist aber DC ǂ BA, dagegen EF Ƶ FE. Mithin sind γ und ε gemischte Parallelwinkel. Da diese nach § 11, 3 supplementar sind, so erhalten wir den Lehrsatz:

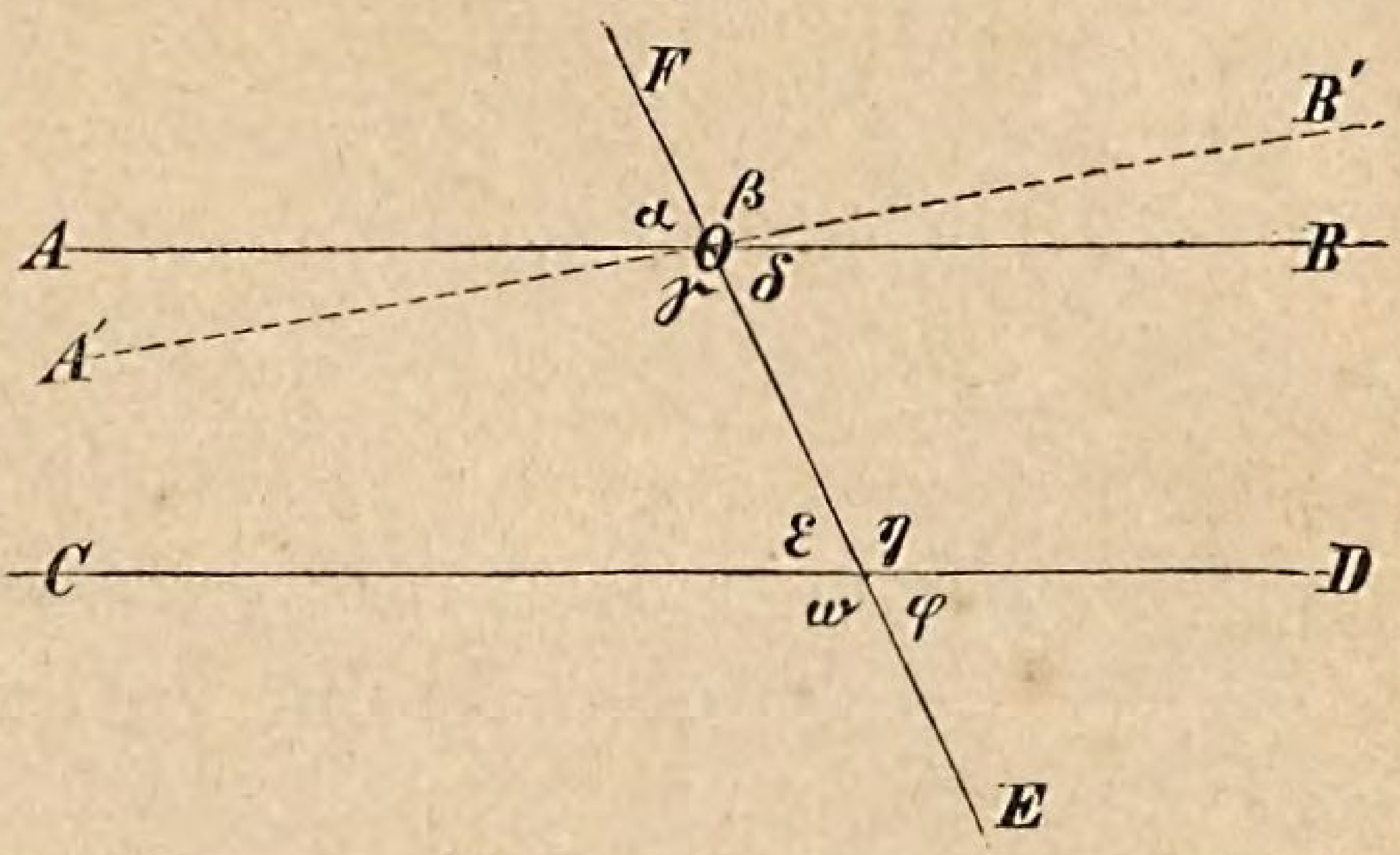
3. Zusammengehörige Winkel bei Parallelen sind supplementar.

§ 15.

Wenn (Fig. 19) AB ‡ CD, und man dreht AB auch um noch so weniges um O, so ist dieselbe nicht mehr parallel CD, und von den vier Winkeln werden 2 kleiner und 2 größer, während ε, η, ω und φ unverändert bleiben. Wir erhalten also die Lehrsätze:

Bei nicht parallelen Geraden sind: 1) die correspondirenden, 2) die Wechselwinkel ungleich, und 3) die zusammengehörigen Winkel nicht supplementar.

Fig. 19.



Da aber bei Parallelen die correspondirenden, sowie die Wechselwinkel, gleich und die zusammengehörigen Winkel supplementar sind, so ergibt sich, daß, wenn die betreffenden Winkel gleich resp. supplementar sind, die geschnittenen Linien parallel sind. Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Sind die correspondirenden Winkel gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel (Fig. 19).

Voraussf. $\beta = \eta$.

Beh. AB ‡ CD.

Bew. β ist der Richtungsunterschied zwischen AB und EF, und η ist der Richtungsunterschied zwischen CD und EF. Da aber nach der Voraussetzung diese Richtungsunterschiede einander gleich sind, so bilden AB und CD mit derselben dritten Richtung EF denselben Richtungsunterschied und müssen also, weil sie außerdem sich nach derselben Seite erstrecken, dieselbe Richtung haben, d. h. sie sind parallel.

2. Sind die Wechselwinkel gleich, so sind die Linien parallel (Fig. 19).

Voraussf. $\beta = \omega$.

Beh. AB ‡ CD.

Bew. $\beta = \omega$ n. V.

$$\frac{\omega = \eta.}{\beta = \eta.}$$

Es sind also die correspondirenden Winkel einander gleich. Mithin AB ‡ CD n. Lehrs. 1.

3. Sind die zusammengehörigen Winkel supplementar, so sind die Linien parallel (Fig. 19).

Voraussſ. $\beta + \varphi = 2$ R.
Beh. AB $\parallel$ CD.
Bew. $\beta + \varphi = 2$ R n. V.
$\varphi + \eta = 2$ R.

$\beta + \varphi = \varphi + \eta.$

Daraus folgt $\beta = \eta$. Da also die correspondirenden Winkel gleich sind, so sind AB und CD parallel n. Lehrſ. 1.

Aufgaben.

§ 16.

1. Wie groß ist die Summe der Folgewinkel (Fig. 20) α, β, γ, δ, deren äußere Schenkel eine Gerade bilden?
2. Wie erhält man den Nebenwinkel von dem gegebenen Winkel ABC (Fig. 21)?

Fig. 20.

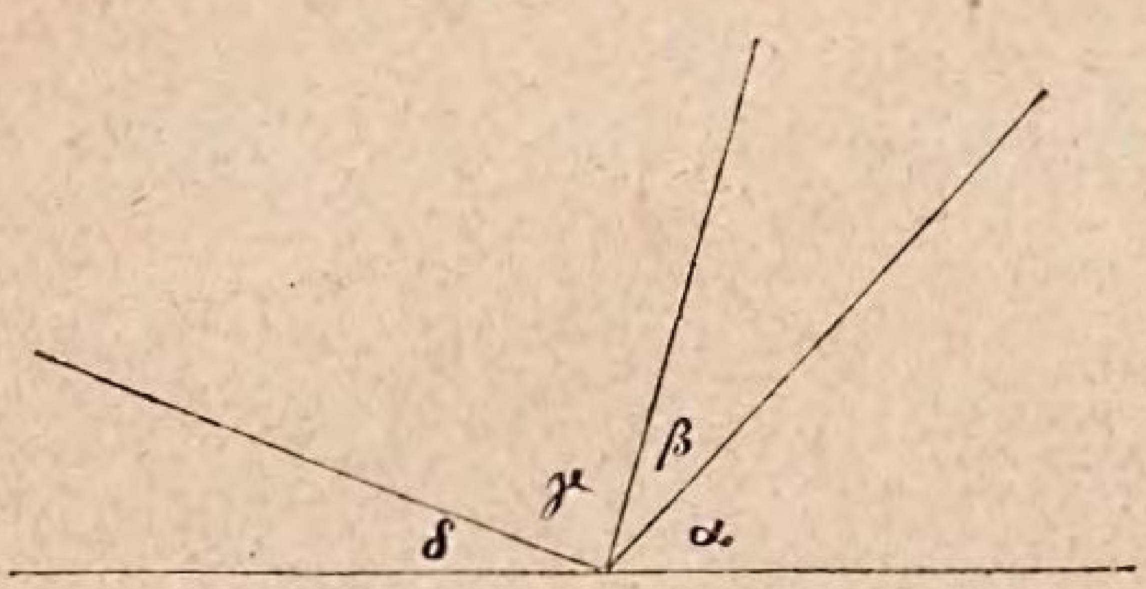
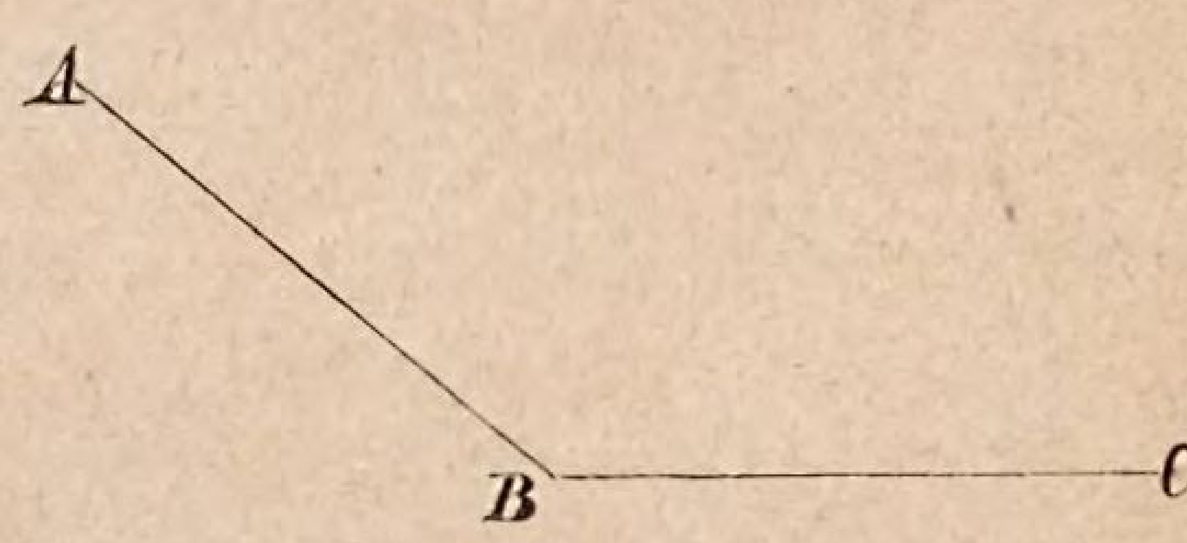
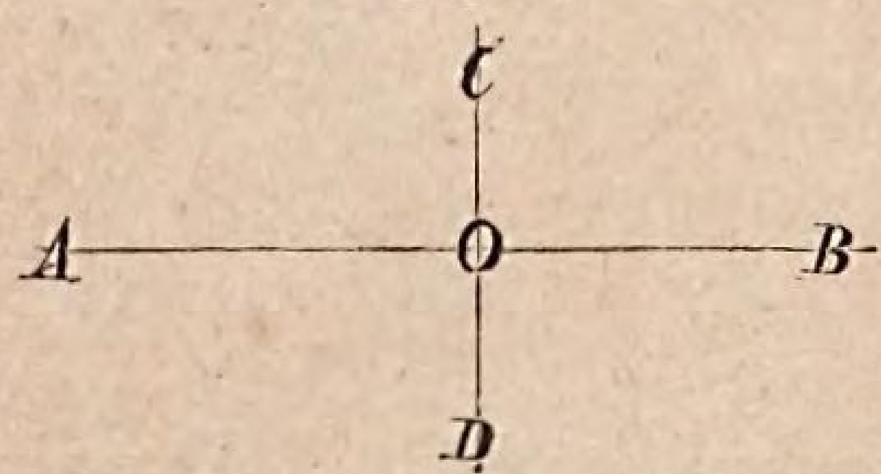


Fig. 21.



3. Wie erhält man den Scheitelwinkel des gegebenen Winkels ABC (Fig. 21)?
4. Wie groß ist der Nebenwinkel von 1 R, $\frac{3}{4}$ R, $1\frac{5}{8}$ R, vom Winkel w?
5. Wie groß ist der Complementwinkel von $\frac{1}{2}$ R, $\frac{2}{3}$ R, $\frac{7}{8}$ R, $\frac{5}{16}$ R, vom Winkel w?
6. Wenn die Summe der Folgewinkel α, β, γ, δ (Fig. 20) 2 R beträgt, was gilt dann von den äußeren Schenkeln?

Fig. 22.



7. In Fig. 22 steht CD in O auf AB senkrecht, d. h. $\sphericalangle$ COB = R; wie groß ist der Winkel, den die um O sich drehende Gerade beschrieben hat, wenn OB zum 1., 2., 3. Male a) in OA, b) in OB, c) in OC, d) in OD fällt?
8. Wenn (Fig. 14) $\alpha = \frac{9}{16}$ R, $\beta = \frac{5}{8}$ R, $\gamma = \frac{3}{4}$ R, $\delta = \frac{7}{16}$ R, wie groß ist dann ε?
9. Wenn α, β, γ, δ, ε sämmtliche Winkel um einen Punkt sind, und

$\alpha = 20^0\ 15'\ 18{,}6''$, $\beta = 112^0\ 58'\ 47''$, $\gamma = 98^0\ 37'\ 14{,}5''$, $\varepsilon = 79^0\ 14'$, wie groß ist dann δ?

10. Wenn α und β Nebenwinkel sind, und a) $\alpha = \frac{1}{3}\beta$, b) $\alpha = \frac{3}{5}\beta$, c) $\beta = 2\frac{1}{3}\alpha$, d) $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, e) $\beta = m.\ \alpha$, wie groß sind dann α und β?

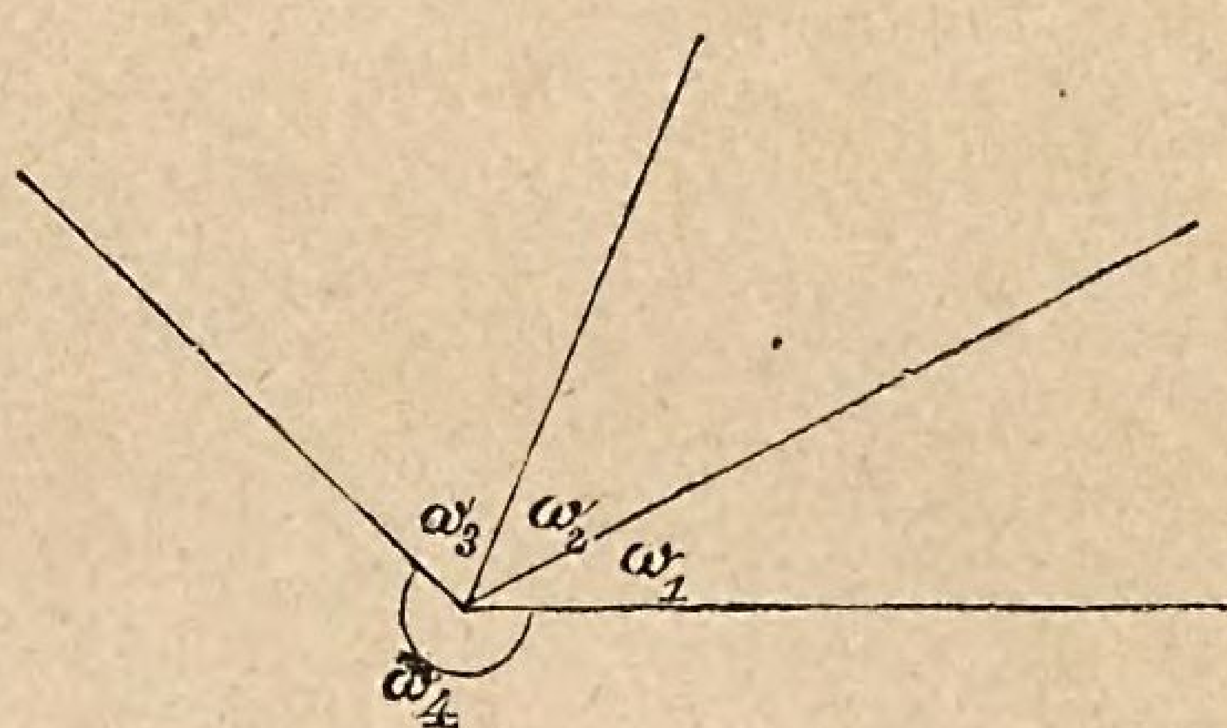
11. Wenn γ, δ, ε die Winkel um einen Punkt sind, und $\gamma = 2\,\delta$, $\varepsilon = 3\,\delta$, wie groß sind dann die einzelnen Winkel?

12. Von den drei Winkeln der vorigen Aufgabe sei $\gamma = 3\,\delta$ und $\varepsilon = 2\,\gamma$. Wie groß sind γ, δ und ε?

13. Von den fünf Winkeln um einen Punkt herum: ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ist $\omega_2 = \frac{1}{2}\,\omega_1$, $\omega_3 = \frac{1}{3}\,\omega_4$, $\omega_4 = 4\,\omega_1$, $\omega_5 = 3\,\omega_2$. Wie groß ist jeder Winkel?

14. Die Summe der drei Winkel ω_1, ω_2, ω_3 in Fig. 23 ist gleich $\frac{4}{5}$ des erhabenen Winkels ω_4. Wie groß sind die vier Winkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 einzeln, wenn $\omega_2 = 1\frac{3}{4}\omega_1$, $\omega_3 = 1\frac{2}{3}\,\omega_2$?

Fig. 23.



15. Wenn (Fig. 18) $\alpha = \varepsilon$, wie verhalten sich dann γ u. ω, β u. η, δ u. φ, α u. φ, α u. η, γ u. η, β u. ω, δ u. ε, γ u. ε, δ u. η, u. φ, α u. ω?

16. Wenn (Fig. 18) $\alpha = \varphi$, wie verhalten sich dann α u. ε, γ u. ω, β u. η, δ u. φ, α u. η, β u. ε, γ u. φ, u. ω, δ u. ε, γ u. η, α u. ω, γ u. ε, δ u. η, β u. φ?

17. Wenn (Fig. 18) $\alpha + \omega = 2$ R, wie verhalten sich dann α u. ε, γ u. ω, β u. η, δ u. φ, α u. φ, β u. ω, γ u. η, δ u. ε, α u. η, γ u. φ, β u. ε, δ u. ω, γ u. ε, β u. φ, δ u. η?

18. $\alpha = \frac{2}{3}\gamma$, $\varepsilon = \frac{3}{4}\,\gamma$ (Fig. 17). Wie groß sind α, β, γ, δ, ε, η, ω, φ?

19. $\beta = 2\ \varphi$, $\delta = \frac{4}{7}\,\eta$ (Fig. 17). Wie groß sind einzeln die 8 Winkel α, β, γ u. s. w.?

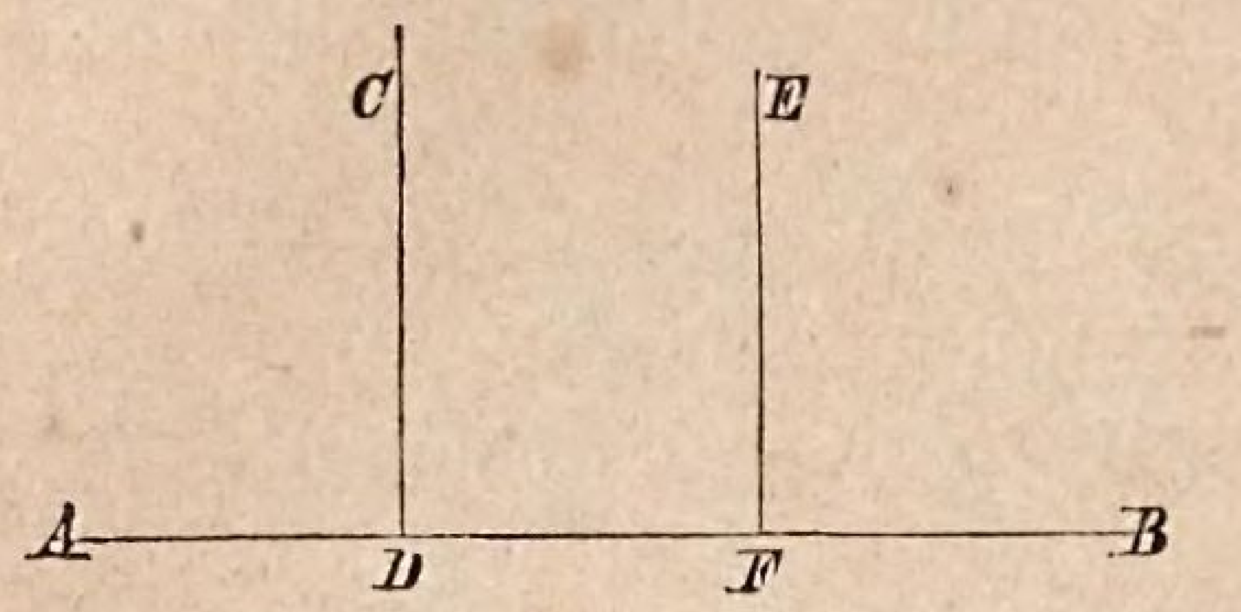
20. In Fig. 18 ist $\omega = \frac{3}{5}$ R und $\beta = \frac{3}{5}$ R; wie verhält es sich mit den Richtungen von AB und CD?

21. In Fig. 18 ist $\alpha = 1\frac{1}{3}$ R und $\eta = \frac{2}{3}$ R; wie verhält es sich mit den Richtungen AB und CD?

22. Wenn in Fig. 18 $\beta = \frac{4}{9}$ R und φ $1\frac{1}{2}$ R, wie verhält es sich dann mit AB und CD?

23. Wenn (Fig. 24) CD $\perp$ (senkrecht) AB und EF $\perp$ AB, d. h., wenn CD und EF mit AB rechte Winkel bilden, welche Beziehung besteht dann zwischen CD und EF?

Fig. 24.



24. Welche Beziehung besteht zwischen Geraden, die mit derselben Linie parallel sind?

25. Wenn eine von zwei Parallelen auf einer dritten Geraden senkrecht steht, welchen Winkel bildet dann die zweite Parallele mit der dritten Geraden?

Zweites Kapitel.

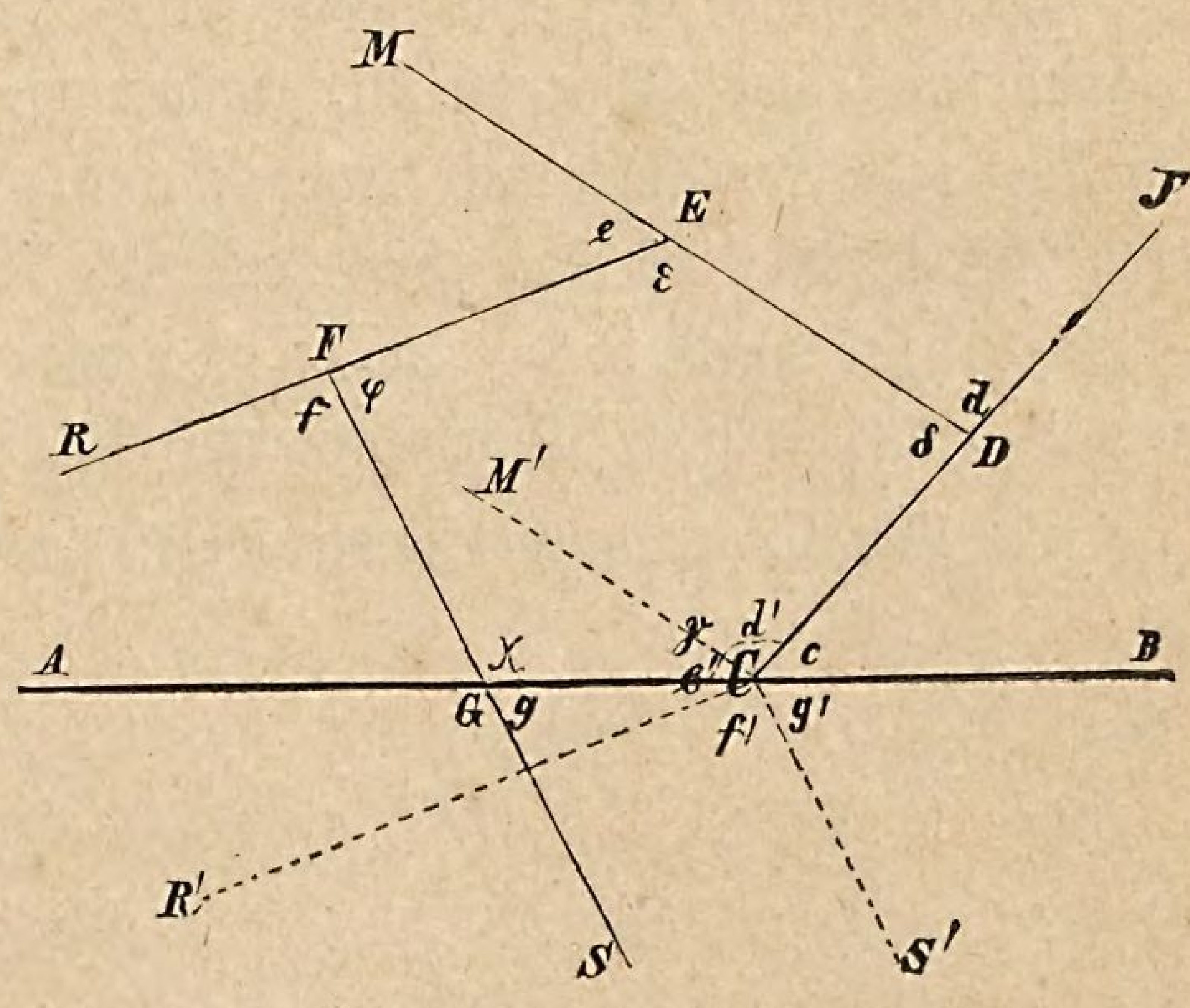
Beziehungen dreier und mehr Geraden, welche sich schneiden, das Vieleck.

A. Allgemeine Sätze über die Winkel des Vielecks.

§ 17.

Da die Größe eines Winkels nur von der Richtung seiner Schenkel abhängig ist, so ist die Lage des Scheitels oder des Drehpunktes der die Winkel erzeugenden Drehung gleichgültig, und kann man also den Drehpunkt auf dem beweglichen Schenkel verschieben, ohne dadurch die Größe des entstehenden Winkels zu beeinflussen.

Fig. 25.



Wenn also (Fig. 25) sich AB um C dreht bis in die Lage CJ, dann auf CJ der Drehpunkt von C nach D verschoben wird, nun die Gerade sich um D dreht bis in die Lage DM, dann um E bis in die Lage ER, dann um F bis in die Lage FS, welche AB in G schneidet, dann um G bis in die ursprüngliche Lage AB, so hat die Gerade eine volle Umdrehung vollendet und mithin (nach § 10, 3) 4 R beschrieben. Nennen wir nun die durch die Drehung erzeugten Winkel c, d, e, f und g, so ist

$$c + d + e + f + g = 4 R.$$

Durch die Verschiebung des Drehpunktes und die vollständige Umdrehung der Geraden ist ein umgrenztes Stück von der Ebene abgeschnitten worden, also eine ebene Figur entstanden. Figuren, welche von geraden

Linien begrenzt sind, heißen Vielecke oder Polygone und werden nach der Anzahl der Seiten oder Ecken benannt. Wir betrachten nur die auf obige Weise entstandenen ebenen Vielecke, welche nur hohle Winkel haben. Bei jeder Ecke eines Vielecks unterscheidet man einen Innenwinkel, der gebildet wird von den beiden Vielecksseiten, die sich in der Ecke schneiden, und einen Außenwinkel, der gebildet wird von einer Vielecksseite und der Verlängerung der Nachbarseite. Wir erhalten demnach den Lehrsatz:

1. Die Summe der Außenwinkel eines Vielecks beträgt 4 R (Fig. 25).

Vorauss. c, d, e, f, g sind die Außenwinkel des Fünfecks CDEFG.

Beh. $c + d + e + f + g = 4\,R$.

Bew. Es sei $CM' \mathrel{\#} DM$,

$CR' \mathrel{\#} ER$,

$CS' \mathrel{\#} FS$.

Alsdann ist $d' = d$, $e' = e$ $f' = f$, $g' = g$ als Parallelwinkel. Mithin ist:

$$c + d + e + f + g = c + d' + e' + f' + g';$$
$$c + d' + e' + f' + g' = 4\,R \text{ (als Winkel um einen Punkt herum).}$$
$$\overline{c + d + e + f + g = 4\,R.}$$

Der Beweis ist unabhängig von der Zahl 5.

Wir haben bei jeder Ecke eines Vielecks (Fig. 25) einen Innenwinkel und einen Außenwinkel, wofern wir von den zwei gleichen Außenwinkeln an einer Ecke nur einen rechnen. Jedes Paar von einem Innen- und Außenwinkel beträgt aber 2 R als Nebenwinkel, mithin die n Paare eines n-Ecks $n \cdot 2\,R = 2\,n\,R$. Da aber die n Außenwinkel nach Lehrsatz 1 4 R betragen, so erhalten wir den Lehrsatz:

2. Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $(2n-4)\,R$.

$$c + \gamma = 2\,R.$$
$$d + \delta = 2\,R.$$
$$e + \varepsilon = 2\,R.$$
$$f + \varphi = 2\,R.$$
$$g + \chi = 2\,R.$$
$$\overline{c + d + e + f + g + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi + \chi = 5 \cdot 2\,R.}$$
$$c + d + e + f + g = 4\,R \text{ (Lehrs. 1).}$$
$$\overline{\gamma + \delta + \varepsilon + \varphi + \chi = (2 \cdot 5 - 4)\,R.}$$

Ein Vieleck, dessen Seiten und Winkel gleich sind, heißt regelmäßiges oder reguläres Vieleck. Da nun die n Winkel eines n-Ecks $(2n-4)$ R

betragen, so ist jeder Winkel eines regelmäßigen nEcks gleich $\frac{2n-4}{n}$ R = $\left(2 - \frac{4}{n}\right)$ R.

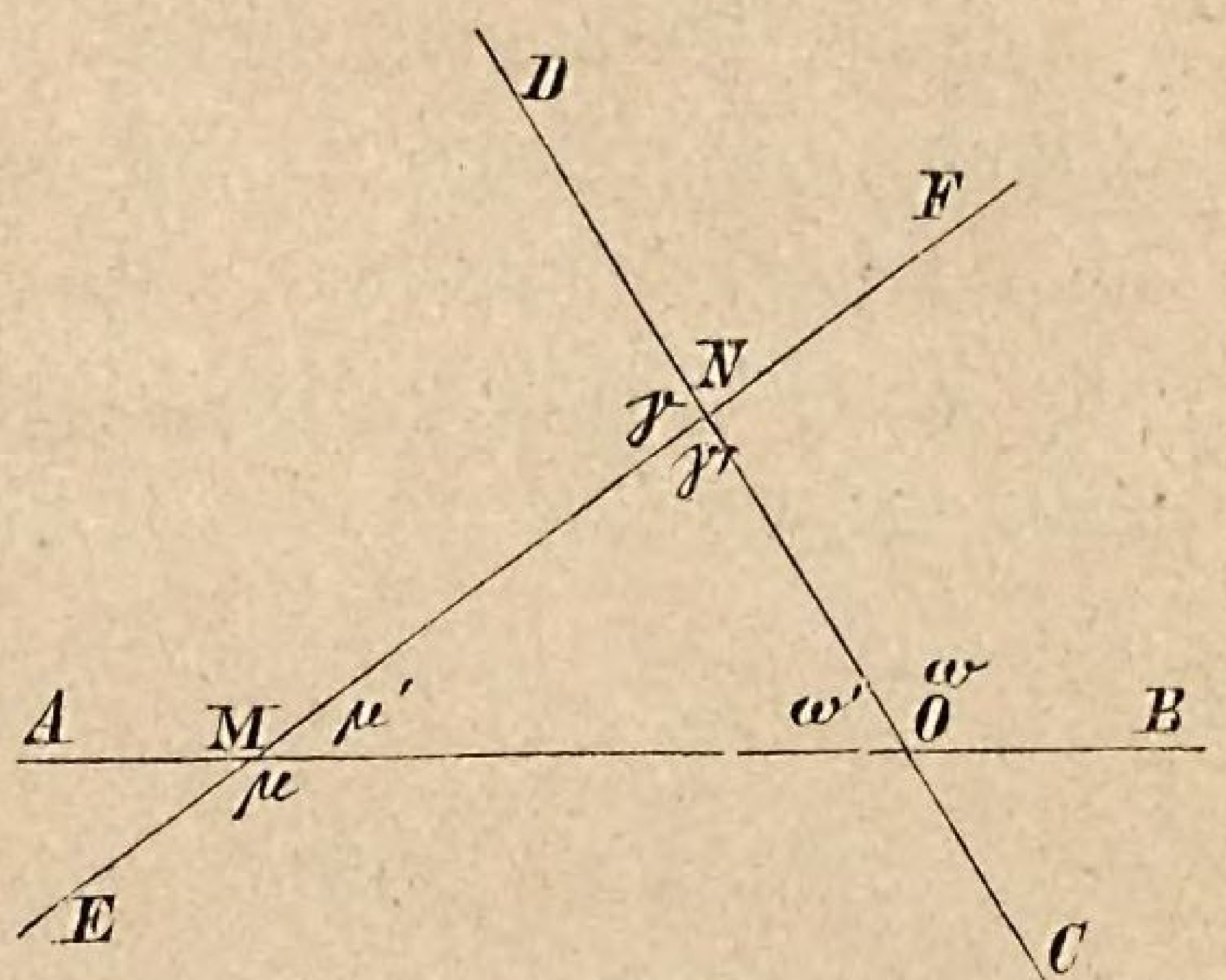
B. Das Dreieck.

Ueber die Winkel des Dreiecks.

§ 18.

Wenn drei Geraden sich gegenseitig schneiden, so entsteht die einfachste vollständig begrenzte Figur: das Dreieck.

Fig. 26.



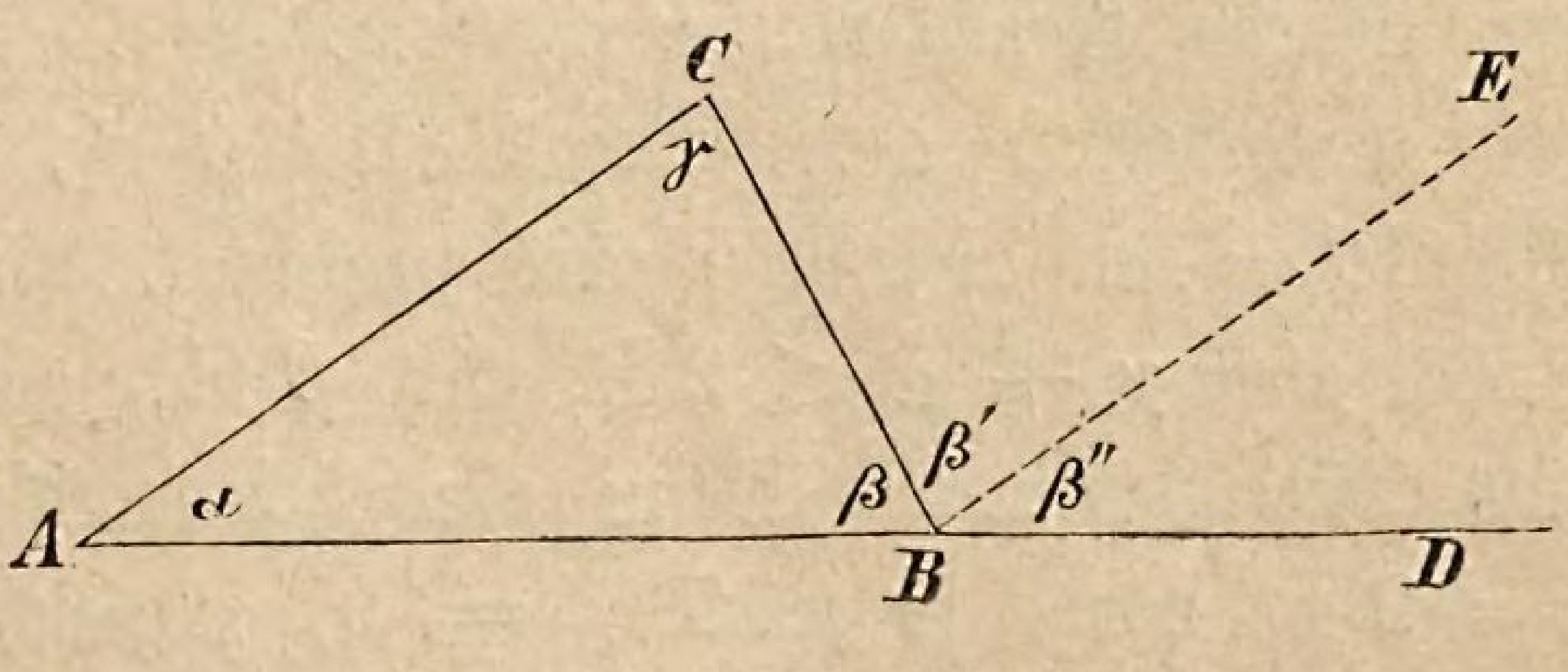
Dreht sich (Fig. 26) AB um O bis CD, dann um N bis FE, welche AB in M schneidet, dann um M bis wiederum in die ursprüngliche Lage, so entsteht das Dreieck MNO. Die Außenwinkel ω, γ und μ betragen zusammen 4 R, mit ihren Nebenwinkeln ω', ν', μ', den Innenwinkeln des Dreiecks, aber 6 R; folglich ist $\omega' + \nu' + \mu' = 2$ R. Dasselbe erhalten wir, wenn wir in § 17, 2 für n die Zahl 3 setzen. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 2 R.

Der Außenwinkel ω (Fig. 26) entsteht durch die Drehung von AB bis in die Richtung CD, der Innenwinkel μ' durch die Drehung von AB bis in die Richtung EF. Diese Drehung ist um die von EF um N bis in die Richtung CD kleiner als die Drehung von AB bis CD, d. h. $\omega = \mu' + \sphericalangle$ DNF $= \mu' + \nu'$. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel (Fig. 27).

Fig. 27.



Voraussf. $\sphericalangle$ CBD Außenwinkel des Dreiecks ABC.

Beh. $\sphericalangle$ CBD $= \alpha + \gamma$.

Bew. Einen Theil von $\sphericalangle$ CBD, der gleich α ist, erhalten wir, wenn wir durch B eine Parallele mit AC gezogen denken. Es sei BE ⫲ AC. Alsdann ist:

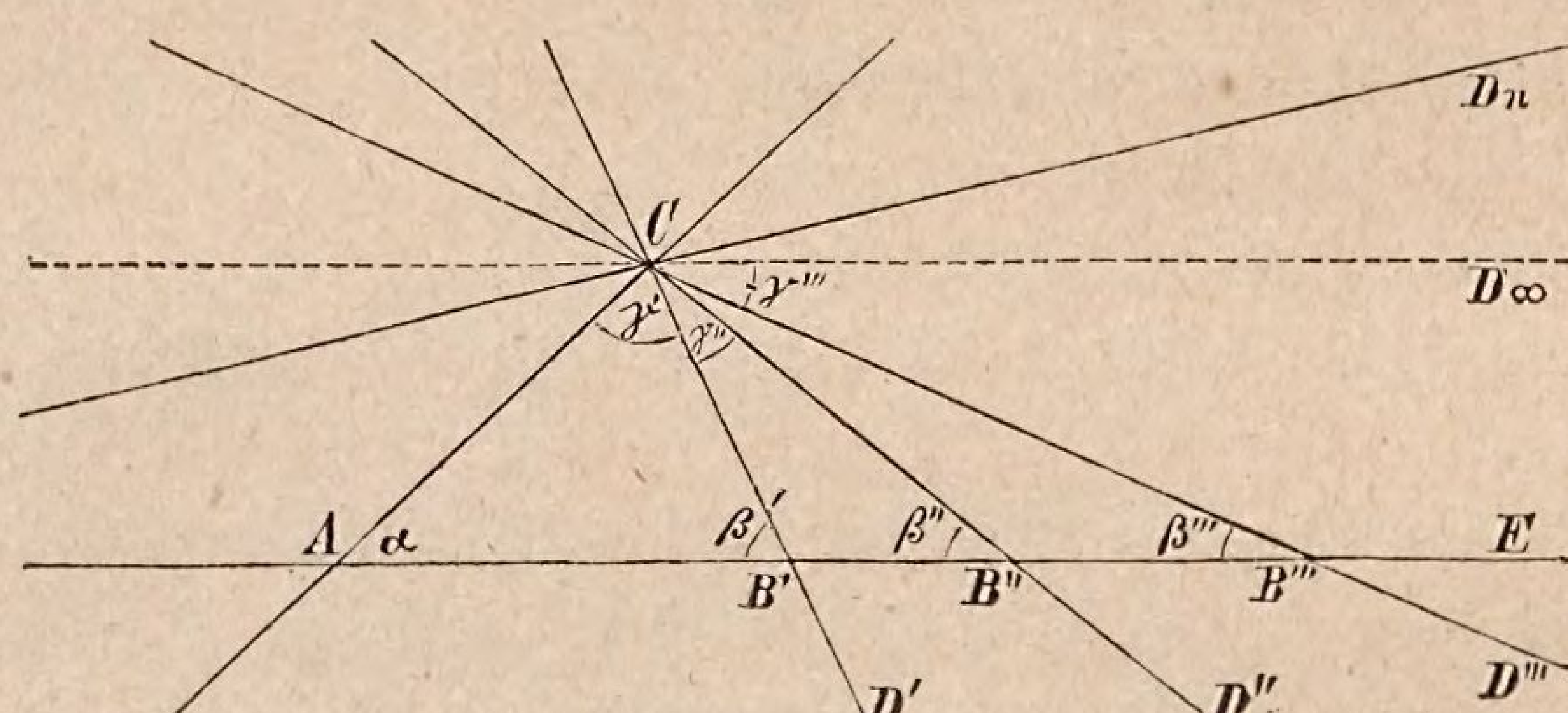
$$\beta' = \gamma \text{ (als Antiparallelw.).}$$
$$\beta'' = \alpha \text{ (als Parallelw.).}$$
$$\beta' + \beta'' = \alpha + \gamma.$$
$$\beta' + \beta'' = \text{CBD}.$$
$$\alpha + \gamma = \text{CBD}.$$

Der Lehrsatz 2 läßt sich auch leicht gewinnen, wenn man beachtet, daß β sowohl mit ∢ CBD, als auch mit $(\alpha + \gamma)$ 2 R beträgt.

§ 19.

Da die Summe der Dreieckswinkel eine unveränderliche Größe ist, so kann der einzelne Winkel nicht eine beliebige Größe annehmen. Aus § 18, 1 folgt unmittelbar, daß die Summe zweier, um so mehr jeder einzelne Winkel, kleiner als 2 R sein muß. Um nun aber die obere und untere Grenze kennen zu lernen, bewege sich (Fig. 28) von den drei Gera-

Fig. 28.



den AC, AE und CD', welche das Dreieck AB'C bilden, die Gerade CD um C nach E hin, während ∢ α und Seite AC unverändert bleiben. Betrachten wir die Gerade in der Lage CD''. Da β' der Außenwinkel des Dreiecks CB'B'' ist, so ist $\beta' = \beta'' + \gamma''$, mithin $\beta'' = \beta' - \gamma''$. Aus dem Dreieck ACB' ist das Dreieck ACB'' geworden, der Winkel an dem veränderlichen Eckpunkt B hat um γ'' abgenommen, dagegen hat der Winkel bei C um dieselbe Größe γ'' zugenommen. Wenn also bei unveränderter Größe von α und AC die Dreiecksseite AB wächst, so nimmt der veränderliche anliegende Winkel β ab, während der gegenüberliegende Winkel γ um dieselbe Größe zunimmt, um die jener abgenommen. So lange aber $\gamma + \alpha < 2$ R, wird β nicht gleich 0, da $\alpha + \beta + \gamma = 2$R als Dreieckswinkel. Wenn aber bei wachsendem γ die Summe $\alpha + \gamma = 2$ R wird, so wird $\beta = 0$, zugleich aber CD in der Lage CD_∞ parallel mit AB, da dann die zusammengehörigen Winkel gleich 2 R sind.

Es ist aber $\beta''' = \gamma'''$, überhaupt der Winkel, den BC mit BA bildet, gleich dem Winkel zwischen CB und CD_∞ als Antiparallelwinkel. So lange also CD nicht parallel AB ist, ist nicht $\beta = 0$, schneidet also CD die Gerade AB. Da C nicht auf AB liegt, so kann bei einer wenn auch noch so großen Größe von AB der Winkel β nicht gleich Null werden. Da er sich aber der Null immer mehr nähert, je größer AB wird, indem jedem Zuwachs von AB ein Zuwachs von γ, also eine Abnahme von β entspricht, und schließlich bei CD_∞ parallel AB $\alpha + \gamma = 2R$ werden, also β verschwindet oder gleich Null wird, so sagt man, daß die Gerade CD_∞ ihre Parallele AB im Unendlichen schneide. Bewegt sich CD über CD_∞ hinaus mehr nach oben, so divergiren die Linien AB und CD auf der rechten Seite von AC, convergiren dagegen links von AC. Wir erhalten daher den Satz:

Nicht parallele Geraden, die in derselben Ebene liegen, schneiden sich nothwendig, dagegen parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen, d. h. schneiden sich nicht, wie weit man sie auch verlängert denken mag, bilden aber die Grenze, der sich zwei sich schneidende Geraden immer mehr nähern, wenn ihr Durchschnittspunkt immer weiter rückt.

Würde sich (Fig. 28) die Gerade AC um C nach links bewegen, so würde sich auch α der Null beliebig nähern können. Wenn sich aber α und β beide der Null nähern, so nähert sich γ einem flachen Winkel, also 2 R. Die Grenzen eines Dreieckswinkels sind also 2 R und 0. Demnach kann in einem Dreieck ein Winkel ein stumpfer, ein rechter, ein spitzer sein. Während aber alle Winkel eines Dreiecks spitz sein können, kann nach § 18 Lehrs. 1 ein Dreieck nicht zwei stumpfe oder zwei rechte Winkel enthalten.

Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinkeliges Dreieck.

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinkeliges Dreieck.

Ein Dreieck mit nur spitzen Winkeln heißt spitzwinkeliges Dreieck.

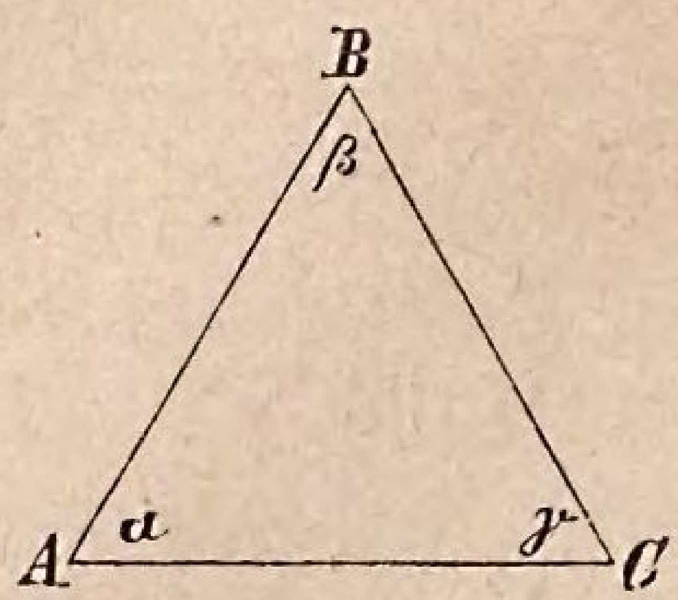
Ueber die Abhängigkeit der Seiten und Winkel des Dreiecks.

§ 20.

Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig. Die gleichen Seiten heißen Schenkel, der eingeschlossene Winkel heißt Winkel an der Spitze, die diesem gegenüberliegende Seite Grundlinie. Ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten einander gleich sind, heißt gleichseitiges Dreieck. Ein Dreieck mit gleichen Winkeln heißt gleichwinkeliges Dreieck.

Aus der obigen Betrachtung (§ 19) ergibt sich auch die Abhängigkeit der Winkel und Seiten von einander. Bei dieser Abhängigkeit wird ein besonderer Fall in der einen Hinsicht auch in der anderen sich kundgeben.

Fig. 29.



Es ist daher zu untersuchen, welche Beziehung zwischen den Seiten eintritt, wenn zwei oder drei Winkel des Dreiecks gleich sind, und was rücksichtlich der Winkel stattfindet, wenn zwei oder drei Seiten gleich sind.

Wenn (Fig. 29) $\alpha = \gamma$, so ist kein Grund vorhanden, weßhalb AB größer oder kleiner als CB sein sollte. Dieselbe Beziehung, die AB zum Dreiecke und seinen einzelnen Stücken hat, wird CB haben, wenn man das Dreieck umdreht. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. In einem Dreieck liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber (Fig. 29).

Vorauss. $\alpha = \gamma$.

Beh. BC = AB.

Bew. Denken wir uns das Dreieck ABC doppelt. Drehen wir nun das obere herum, so daß Winkel γ des oberen den gleichen Winkel α des unteren deckt, so muß der Punkt A des oberen auf den Punkt C des unteren fallen, und mithin der Winkel α des oberen den gleichen Winkel γ des unteren decken. Es decken sich daher auch AB des oberen und BC des unteren, sowie BC des oberen und AB des unteren Dreiecks. Es ist also AB = BC.

Wenn wir von dem Dreieck ABC (Fig. 29) nichts wissen, als daß AB = BC, so liegt kein Grund vor, weßhalb α nicht gleich γ sein sollte. Dieselbe Beziehung, die α zum Dreieck ABC hat, wird γ haben, wenn wir das Dreieck umkehren. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. In einem Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber (Fig. 29).

Vorauss. AB = CB.

Beh. $\gamma = \alpha$.

Bew. Denken wir uns das Dreieck ABC doppelt. Drehen wir nun das obere Dreieck herum und legen es so auf das untere, daß der Winkel β des oberen den Winkel β des unteren deckt, so muß BC des oberen die gleiche Seite BA des unteren und BA des oberen die gleiche Seite BC des unteren decken. Es fällt also Punkt C des oberen in Punkt A des unteren und Punkt A des oberen in Punkt C des unteren. Es deckt also Winkel γ des oberen den Winkel α des unteren, und α des oberen γ des unteren Dreiecks. Es ist also $\alpha = \gamma$.

Wenn (Fig. 30) $\alpha = \beta = \gamma$, so ist:

$\alpha = \beta$ n. V.

AC = BC n. 1.

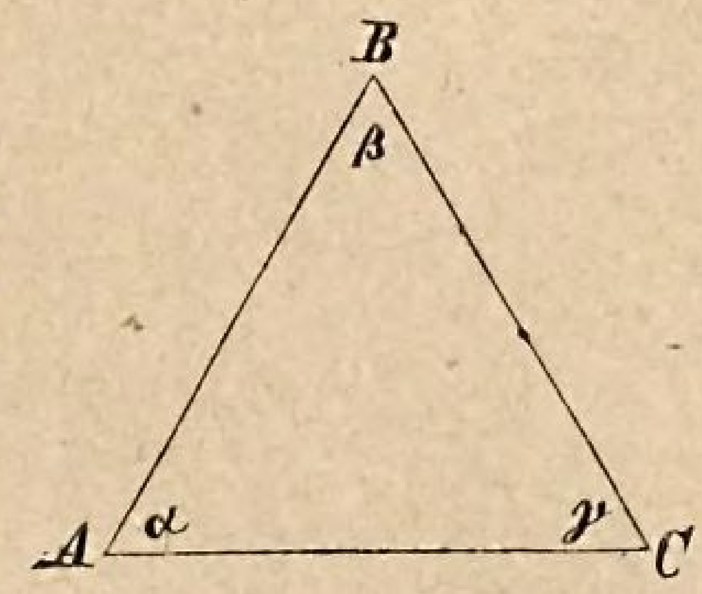
$\alpha = \gamma$ n. V.

BC = BA n. 1.

Wir haben also AB = BC = CA. Wir erhalten also den Lehrsatz:

Das gleichwinklige Dreieck ist auch ein gleichseitiges.

Fig. 30.



Wenn (Fig. 30) AB = BC = CA, so ist:

AB = BC n. V.

$\gamma = \alpha$ n. Lehrs. 2.

AB = AC n. V.

$\gamma = \beta$ n. Lehrs. 2.

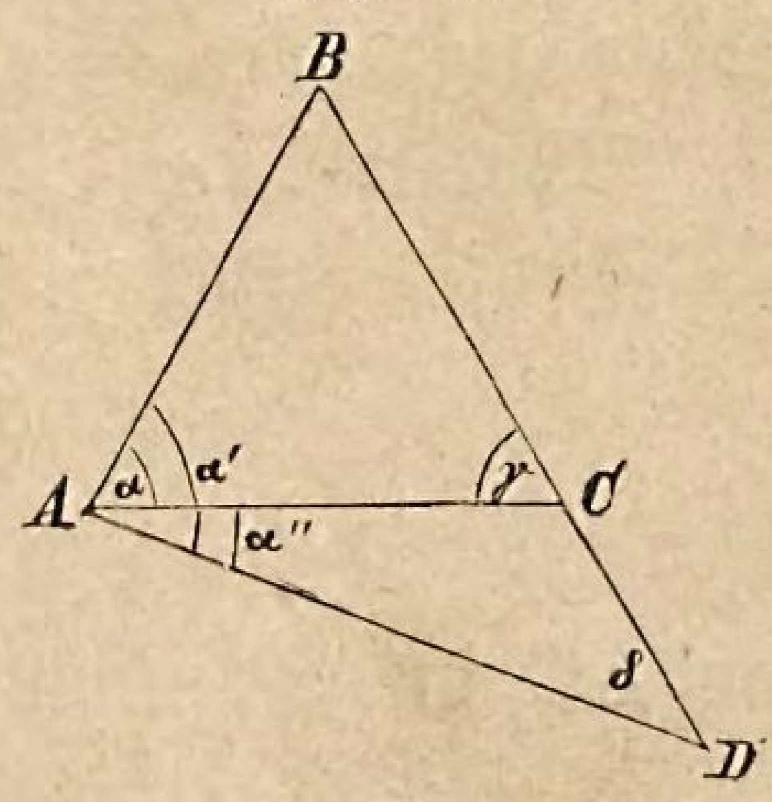
Wir haben also $\alpha = \beta = \gamma$. Wir erhalten also den Lehrsatz:

Das gleichseitige Dreieck ist auch ein gleichwinkliges.

§ 21.

Um die Abhängigkeit der Winkel von den Seiten und umgekehrt der Seiten von den Winkeln auch für den Fall zu erhalten, daß die Seiten ungleich sind, lassen wir die eine Seite BC des gleichschenkligen Dreiecks ABC (Fig. 31) über C hinaus zunehmen. Dann wächst der Winkel bei A, dagegen nimmt der AB gegenüberliegende Winkel ab. Wenn BC um CD wächst, so ist der Winkel bei A um α'' gewachsen, indem $\alpha' = \alpha + \alpha''$, dagegen hat der AB gegenüberliegende Winkel um α'' abgenommen, denn $\gamma = \delta + \alpha''$, also $\delta = \gamma - \alpha''$, da γ der Außenwinkel des Dreiecks ACD ist (§ 18, 2). Da aber im gleichschenkligen Dreieck ABC $\alpha = \gamma$, γ aber größer als δ, so ist auch $\alpha > \delta$; um so mehr $\alpha' > \delta$. α' liegt aber BD und δ der kleineren Seite AB im Dreieck ABD gegenüber. Wir erhalten also den Lehrsatz:

Fig. 31.



1. In einem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber (Fig. 31).

Vorauss. BD > BA.

Beh. $\alpha' > \delta$.

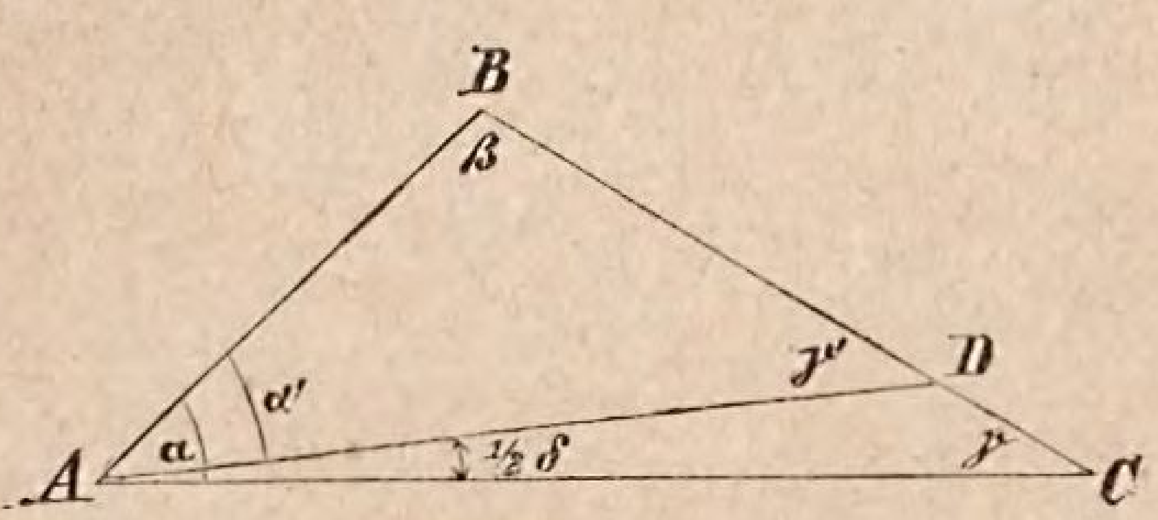
Bew. Ich mache BC = BA. Dann ist

$$\alpha = \quad (\S\ 20,\ 2).$$

Es ist aber $\gamma > \delta$ (§ 18, 2).

$$\alpha > \delta.$$
$$\alpha' > \alpha.$$
$$\alpha' > \delta.$$

Fig. 32.



In Fig. 32 ist $\alpha > \gamma$. Es ist zu untersuchen, wie es sich dann mit den gegenüberliegenden Seiten BC und AB verhält. Es sei $\alpha - \gamma = \delta$. Wenn bei unverändertem Winkel β der Winkel α abnimmt, so muß der AB gegenüberliegende Winkel um das wachsen, um welches α abnimmt, da die Summe der drei Dreieckswinkel unverändert bleibt. Nimmt also der Winkel bei A um $\frac{\delta}{2}$ ab, so nimmt der AB gegenüberliegende Winkel um $\frac{\delta}{2}$ zu. Da aber δ der Unterschied zwischen α und γ ist, so ist $\alpha - \frac{\delta}{2} = \gamma + \frac{\delta}{2}$, oder $\alpha' = \gamma'$. Mithin ist AB = BD; folglich BC > AB. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. In einem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber (Fig. 32).

Vorauss. $\alpha > \gamma$.

Beh. BC > AB.

Bew. Es sei δ der Unterschied der beiden Winkel α und γ, also $\alpha = \gamma + \delta$. Ich schneide nun von α die Hälfte von δ ab, indem ich an AC in A den Winkel $\frac{1}{2}\,\delta$ anlege. Es sei Winkel CAD. Alsdann ist

$$\alpha' = \alpha - \frac{1}{2}\,\delta = \gamma + \delta - \frac{1}{2}\,\delta = \gamma + \frac{1}{2}\,\delta;$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{1}{2}\,\delta \quad (\S\ 18,\ 2).$$

$$\alpha' = \gamma'.$$

Mithin ist BD = AB, folglich BC > AB.

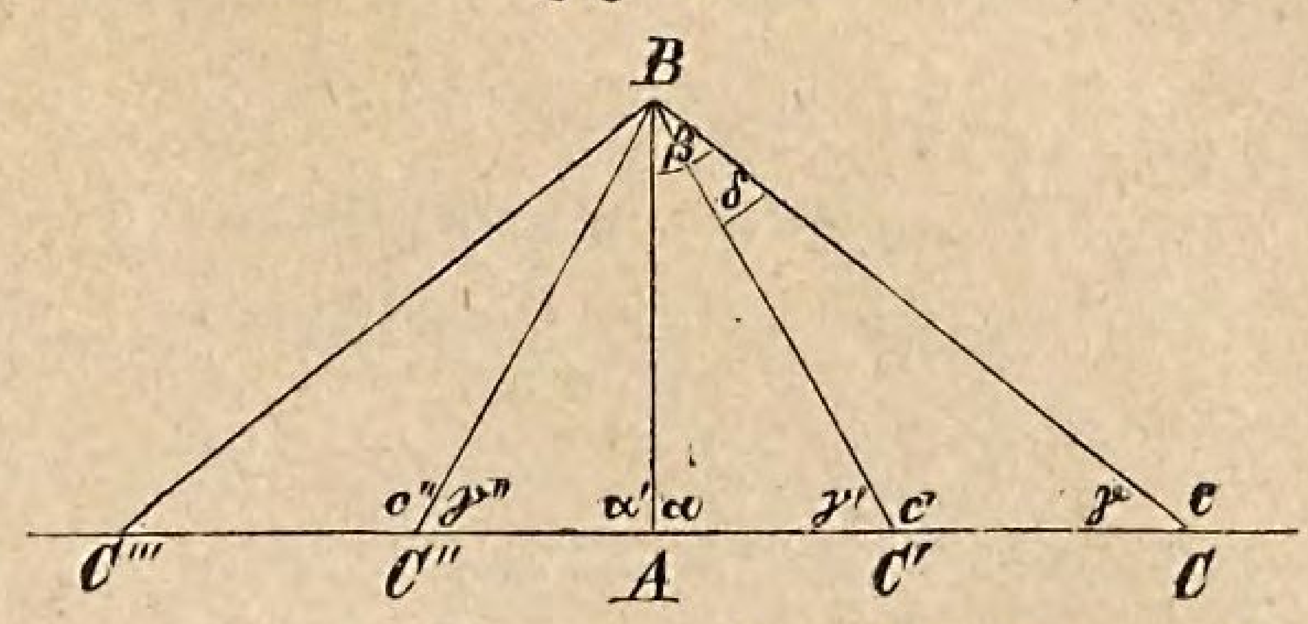
§ 22.

In einem stumpfwinkligen Dreieck ist der stumpfe Winkel der größte. (Warum?) Mithin ist im stumpfwinkligen Dreiecke die Gegenseite des stumpfen Winkels die größte Dreieckseite. Im rechtwinkligen Dreiecke ist

der rechte Winkel der größte. Mithin ist im rechtwinkligen Dreiecke die Gegenseite des rechten Winkels die größte Dreiecksseite. Diese Gegenseite des rechten Winkels heißt Hypotenuse, die den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen Katheten.

Wenn in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 33) die Kathete AC um CC′ abnimmt, so nimmt der gegenüberliegende spitze Winkel β um δ ab, während der anliegende spitze Winkel γ um δ zunimmt. Der Außenwinkel c nimmt ebenfalls um δ ab, da $c = c' + \delta$, bleibt aber ein stumpfer Winkel, bis BC mit BA zusammenfällt, in welchem Falle er ein rechter wird. Da aber $c' > R$, so ist $BC' < BC$. Es nimmt also auch die Hypotenuse ab und hat als Grenze BA, da, wenn die Kathete $AC = 0$ wird, BC mit BA zusammenfällt. Bewegt sich aber die Hypotenuse über BA hinaus nach links, so nimmt der Winkel γ, der in A ebenfalls ein rechter war, ab, dagegen nimmt der Außenwinkel wieder zu und ist in allen Fällen ein stumpfer. Da aber $c'' > R$, so ist $BC'' < BC'''$; die Hypotenusen nehmen also mit der Entfernung von A zu. Aus dem Vorhergehenden erhalten wir den Lehrsatz:

Fig. 33.



1. Von allen Verbindungslinien, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste (Fig. 33).

Voraus. $AB \perp C'''C$.

Beh. $AB < BC'$.

Bew. $\alpha = R$. n. V. Folglich

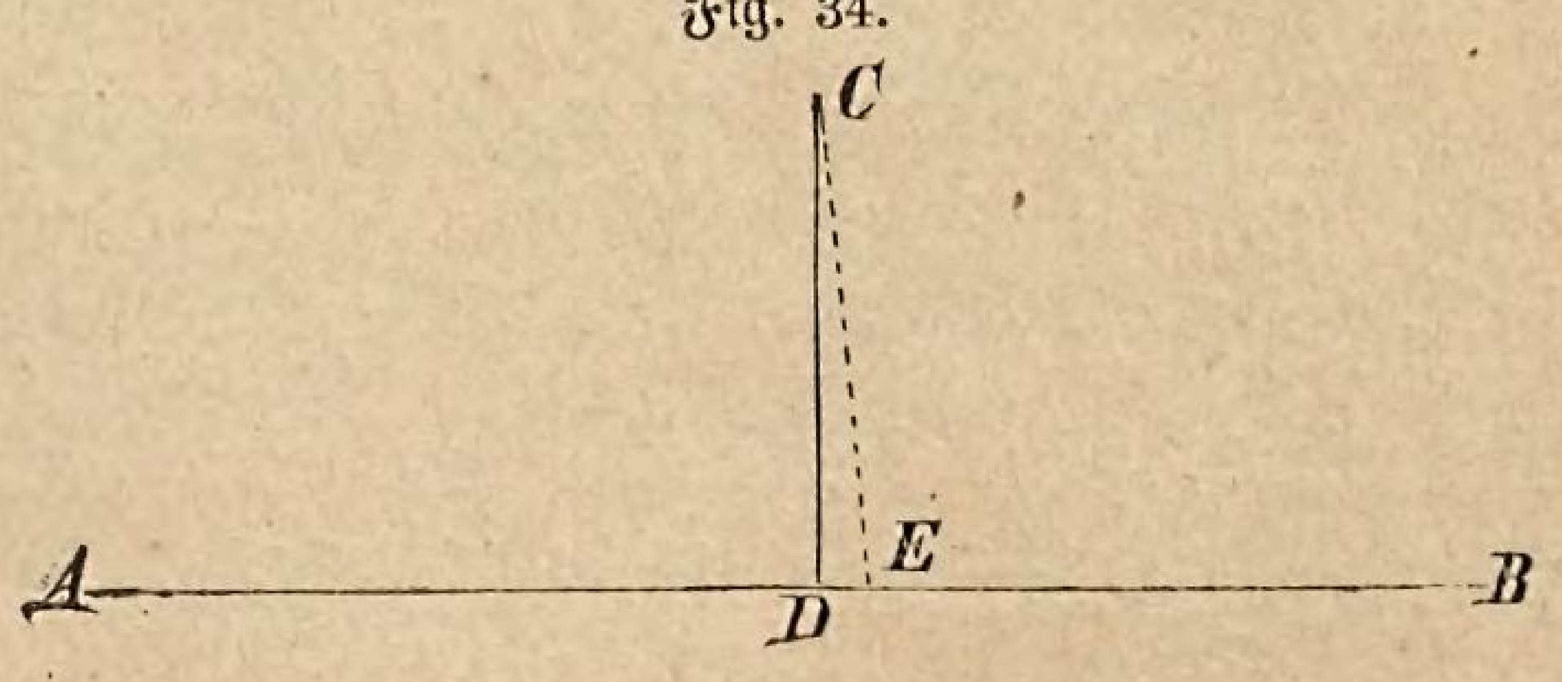
$\alpha > \gamma'$.

Mithin $BC' > BA$.

Man nennt die Senkrechte AB die Entfernung des Punktes B von der Geraden C′C″. Da die Senkrechte die kürzeste Verbindungslinie ist, so kann es keine kürzere als die Senkrechte geben. Ist also von allen Verbindungslinien eine gewisse die kürzeste, so steht sie auf der Geraden senkrecht. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Wenn von allen Verbindungslinien, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, eine gewisse die kürzeste ist, so steht sie auf der Geraden senkrecht (Fig. 34).

Fig. 34.



Vorauss. CD ist die kürzeste Verbindungslinie des Punktes C mit der Geraden AB.

Bh. CD $\perp$ AB.

Bew. Gesetzt, nicht CD, sondern CE stände senkrecht auf AB. Alsdann wäre nach 1 CE kleiner als CD. Dieses widerspricht der Voraussetzung. Also kann keine andere als CD senkrecht auf AB stehen.

Da in Fig. 33 $\alpha = \alpha' = R$, so wird, wenn man BAC um AB herumschlägt, AC die Richtung von AC''' nehmen. Mithin fallen die einzelnen Punkte von AC auf diejenigen Punkte von AC''', die mit ihnen von A gleich weit entfernt sind; ebenso decken die Hypotenusen von der rechten Seite diejenigen der linken Seite, welche ebenso weit von A nach links liegen, wie sie selbst nach rechts. Wir erhalten also mit Berücksichtigung der obigen Entwicklung den Lehrsatz:

3. Von allen Verbindungslinien eines Punktes mit den Punkten einer Geraden sind je zwei, die sich gleich weit vom Fußpunkt der Senkrechten entfernen, einander gleich und bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel. Die Verbindungslinien sind um so größer, je weiter sie sich vom Fußpunkt der Senkrechten entfernen (Fig. 33).

Vorauss. AB $\perp$ C''C', AC'' = AC'.

Bh. BC'' = BC', $\sphericalangle$ C''BA = C'BA, BC''' > BC''.

Bew. Ich drehe das Dreieck ABC' um AB. Dann muß AC' die Richtung von AC'' nehmen, weil $\alpha' = \alpha$ als Rechte. Nun muß C' in C'' fallen, weil AC' = AC''. Es deckt also BC' die Linie BC'' und $\sphericalangle$ C'BA den Winkel C''BA. Mithin BC' = BC'', und $\sphericalangle$ C'BA = C''BA. Es ist ferner $c'' > \alpha'$, mithin $c'' > R$. Mithin ist im Dreieck BC''C''' BC''' > BC''.

§ 23.

Betrachten wir Fig. 33 zwei Verbindungslinien auf derselben Seite von AB, so sind dieselben, da ihre Entfernungen auf CC''' von A ungleich sind, von verschiedener Größe. Also gibt es auf derselben Seite von der Senkrechten keine zwei gleiche gerade Verbindungslinien.

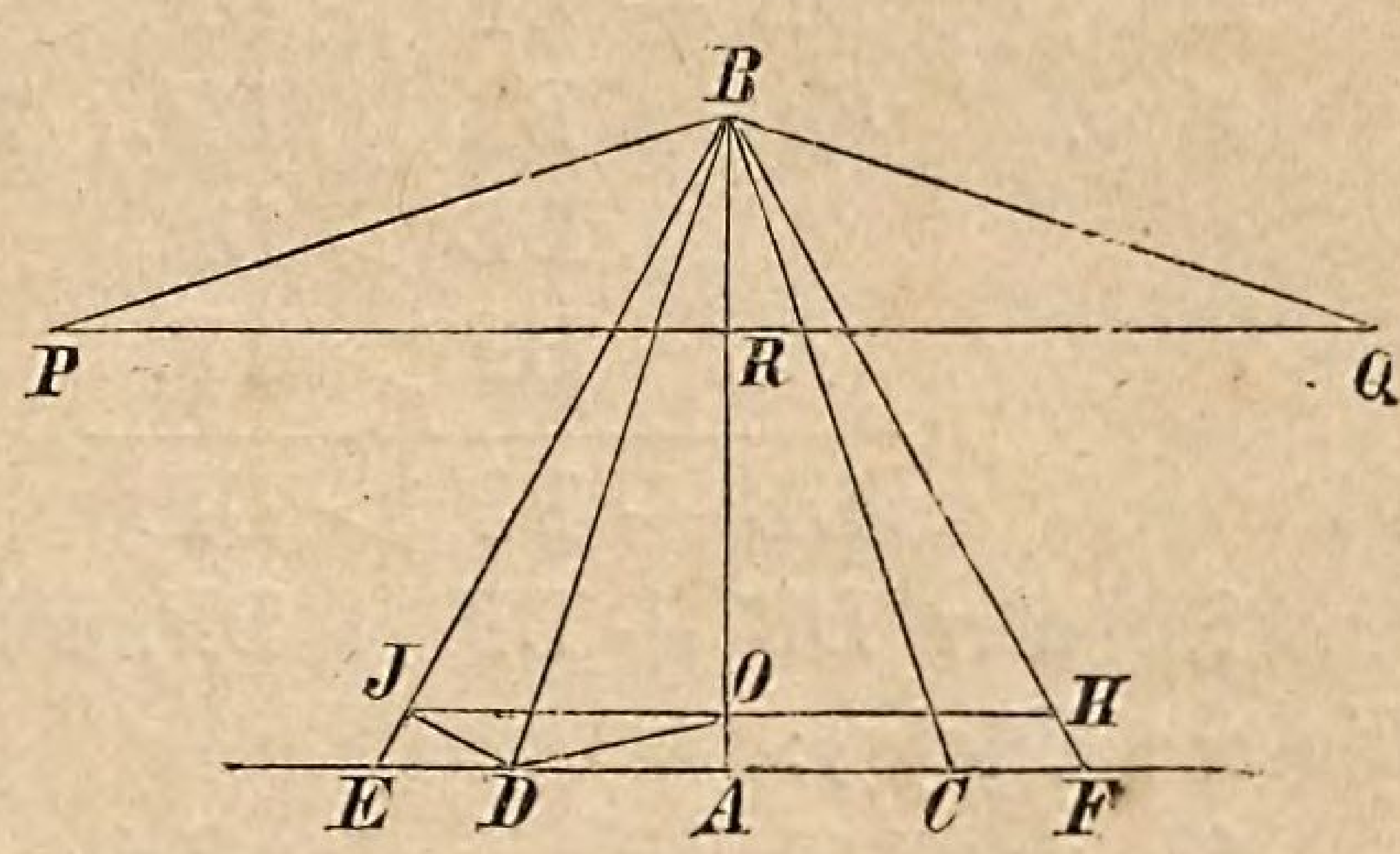
Betrachten wir dagegen zwei gleiche Verbindungslinien BC' und BC'' (Fig. 33), so bilden dieselben ein gleichschenkliges Dreieck C''BC', dessen Grundlinie C'C'' von der von der Spitze auf dieselbe gefällten Senkrechten halbirt wird. Eine Senkrechte von einer Ecke eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällt, heißt Höhe. Wir erhalten also den Satz:

1. Im gleichschenkligen Dreieck wird die Grundlinie von der zugehörigen Höhe halbirt.

Da es aber von der Spitze B auf die Gerade C‴C immer eine, aber nur eine, Senkrechte gibt, diese aber die Grundlinie C″C′ in A halbirt, so muß auch umgekehrt die gerade Verbindungslinie des Halbirungspunktes der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks mit der Spitze desselben auf der Grundlinie senkrecht stehen, und aus demselben Grunde muß die Senkrechte, im Halbirungspunkte der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks auf der Grundlinie errichtet, durch die Spitze des Dreiecks gehen.

Wenn in dem gleichschenkligen Dreieck DBC (Fig. 35) die Höhe AB unverändert bleibt, dagegen der Winkel an der Spitze, ∢ DBC, wächst, so nehmen die Grundlinie und die beiden gleichen Seiten zu. Wächst ∢ DBC auf beiden Seiten um die gleichen Winkel EBD und CBF, so wird aus der Grundlinie DC die Grundlinie EF, und aus den gleichen Seiten BD und BC die gleichen Seiten BE und BF.

Fig. 35.



Um nun den Fall zu untersuchen, wenn der Winkel an der Spitze wächst, dagegen die gleichen Seiten unverändert bleiben, schneiden wir von BE das Stück BJ = BD ab. Wenn nun JH $\parallel$ EF, so steht JH senkrecht auf AB, weil die Parallele EF auf AB senkrecht steht. Da aber die Winkel bei O Rechte, und ∢ OBJ = OBH, so muß das Dreieck OBJ, wenn wir es um OB drehen, das Dreieck OBH decken. Es ist also OJ = OH und BJ = BH. Das Dreieck JBH ist also gleichschenklig und OB die Höhe auf der Grundlinie. Da aber OB $<$ AB, so ist die Höhe kleiner geworden. ∢ BJD = BDJ. Mithin ∢ JDO $>$ DJO. Folglich JO $>$ DO $>$ DA. Also auch JH $>$ DC. Die Höhe hat zur Grenze Null, während der Winkel an der Spitze B sich 2 R und die Grundlinie sich 2. BD nähert. Wir erhalten also den Lehrsatz:

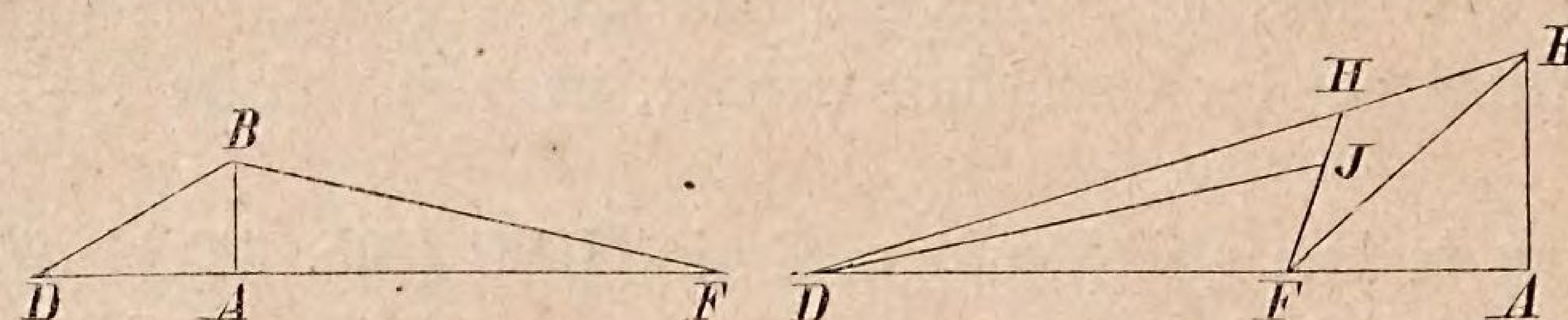
2. Wenn beim gleichschenkligen Dreiecke bei gleichbleibendem Schenkel der Winkel an der Spitze zunimmt, so nimmt die Grundlinie zu, während die entsprechende Höhe abnimmt.

Ueber die Abhängigkeit der Dreiecksseiten von einander.

§ 24.

In Fig. 36 ist FB $>$ FA, wenn BA $\perp$ FD, BD $>$ AD. Dieses ist der Fall, wenn auch F oder D oder beide noch soweit von A wegrücken, und B auch noch so nahe an A heranrückt. Es ist daher FB $+$ BD $>$ FD. Dieses findet um so mehr statt, wenn F und D auf derselben Seite von

Fig. 36.



A liegen. Der Weg von F über B nach D ist also länger, als in derselben Richtung von F nach D. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite (Fig. 36).

Voraussſ. DBF ein Dreieck.

Bh. DB $+$ BF $>$ DF.

Bew. Es sei BA $\perp$ DF. Alsdann ist:

$$DB > DA,$$
$$BF > AF.$$
$$\overline{}$$
$$DB + BF > DF.$$

Ist aber DB $+$ BF $>$ DF, so ist DB $>$ DF $-$ BF. Wir erhalten also den Lehrsatz:

In einem Dreiecke ist eine Seite größer als die Differenz der beiden anderen.

Daß in einem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte sei, ergibt sich auch unmittelbar aus der Entstehungsweise der geraden Linie. Die Strecke DF (Fig. 36) ist dadurch entstanden, daß sich ein Punkt in unveränderter Richtung von D nach F bewegt. Dagegen entsteht die gebrochene Linie DBF dadurch, daß sich der Punkt von D nach B bewegt, dort die Richtung seiner Bewegung ändert, und nun sich bis F bewegt. Es ergibt sich also:

Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte.

Ist aber die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten, weil bei derselben die Richtung sich nicht ändert, so wird dagegen der Weg um so größer sein, je mehr bei einer gebrochenen Linie die Richtung geändert werden muß. Es ist daher (Fig. 36) der Weg von F über B nach

D größer als der Weg von F über H nach D; dieser aber wieder größer als von F blos über J nach D. Es ist also FB + BD > FJ + JD. Mithin auch DF + FB + BD > DF + FJ + JD.

Durch mehrfache Anwendung des Vorhergehenden erhalten wir den Lehrsatz:

2. Der Umfang der umschließenden Figur ist größer als der Umfang der umschlossenen (wenn diese keine überstumpfe Winkel hat) (Fig. 36).

Vorauss. △ DBF umschließt △ DJF.

Bh. DF + FB + BD > DF + FJ + JD.

Bew. FJ trifft verlängert DB in H. Es ist nun:

DH + HJ > JD (Lehrs. 1).

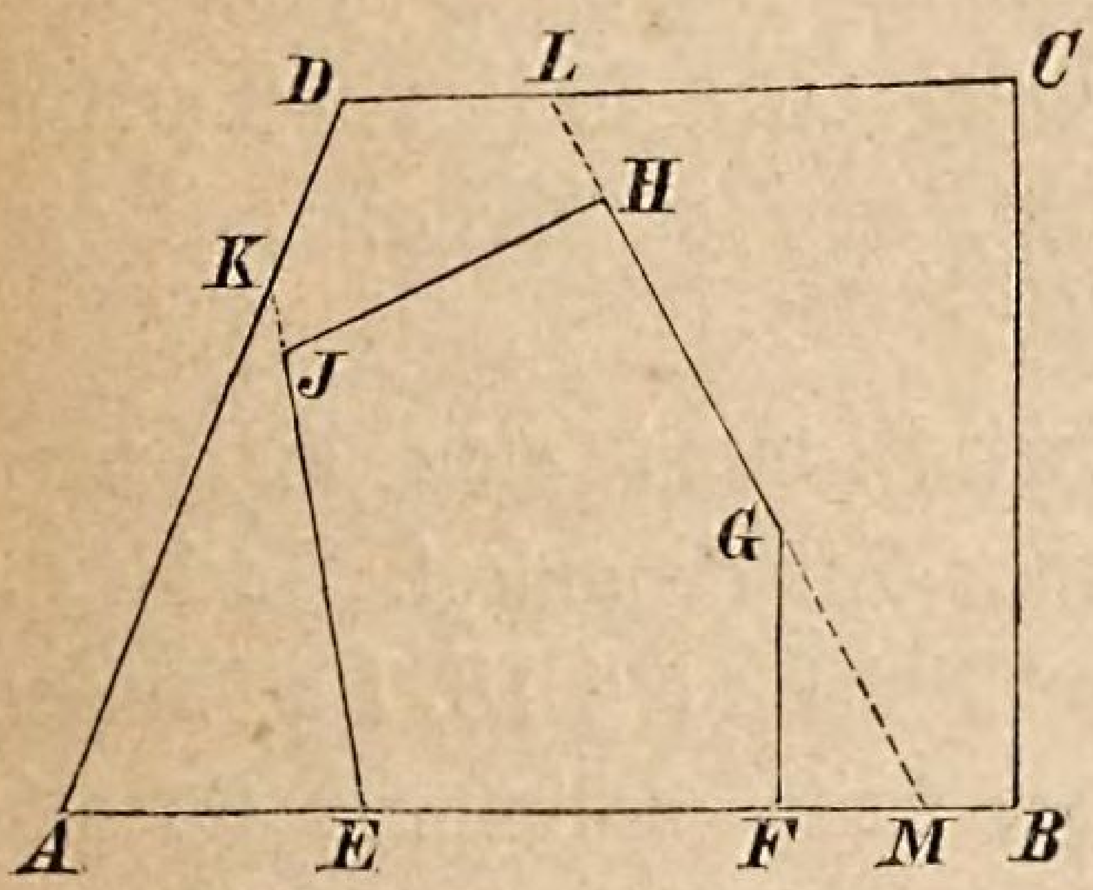
HB + FB > FJ + HJ Lehrs. (1).

DH + HB + FB + HJ > FJ + JD + HJ, oder

DB + FB > FJ + JD. Mithin auch

DF + FB + BD > DF + FJ + JD.

Fig. 37.



Durch Anwendung des Lehrsatzes 1 ergibt sich auch (Fig. 37): Umfang von ABCD größer als Umfang von EBCDK; Umfang von EBCDK größer als Umfang von EMLDK; Umfang von EMLDK größer als Umfang EMHJ; Umfang von EMHJ größer als Umfang von EFGHJ. Mithin auch Umfang von ABCD größer als Umfang von EFGHJ.

Congruenz der Dreiecke.

§ 25.

Figuren heißen congruent, wenn sie sich nur durch ihre Lage unterscheiden. Sie stimmen also überein in Inhalt und Form, und ihre Verschiedenheit beruht nur darin, daß die eine sich an einem anderen Orte befindet, als die zweite. Hebt man diese Verschiedenheit der Lage auf, indem man die eine auf die andere legt, so decken sie sich vollständig, bilden also nur eine Figur.

Ein Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel, also sechs Hauptstücke, in welchen mithin congruente Dreiecke übereinstimmen. Wegen der gegenseitigen Abhängigkeit dieser sechs, sowie aller anderen Stücke desselben Dreiecks, von einander, ist es nicht nothwendig, alle sechs Stücke zu unter-

suchen. So ist z. B., wenn zwei Winkel eines Dreiecks bekannt sind, der dritte ebenfalls bestimmt, da er mit jenen zusammen genommen 2 R ausmacht. Ist aber ein Dreieck durch eine Anzahl Stücke vollständig bestimmt, so können die Dreiecke, welche in diesen Stücken übereinstimmen, sich nur durch ihre Lage unterscheiden, sind also congruent. Untersuchen wir daher, welche Stücke erforderlich sind, damit ein Dreieck bestimmt sei.

1) Gegeben ist von einem Dreieck ein Stück: eine Seite oder ein Winkel. Das Dreieck ist nicht bestimmt.

2) Es sind zwei Stücke gegeben:

a) Zwei Seiten. Zeichne ich dann eine Seite hin, so kann ich die zweite unter jedem hohlen Winkel anlegen, um ein Dreieck zu erhalten. Es gibt also unendlich viele Dreiecke, die in zwei Seiten übereinstimmen.

b) Eine Seite und ein Winkel. Zeichne ich die Seite hin und lege den Winkel an dieselbe, so erhalte ich ein Dreieck, wenn ich die zweite Seite beliebig groß nehme. Es gibt also auch unendlich viele Dreiecke, die in einer Seite und einem Winkel übereinstimmen. Sollte aber der gegebene Winkel der gegebenen Seite gegenüber liegen, so kann man die der Seite anliegenden Winkel auf unendlich viele Weisen bestimmen, da man nur an die Bedingung gebunden ist, daß die beiden mit dem gegebenen 2 R ausmachen.

c) Zwei Winkel. Man erhält ein Dreieck, wenn man die beiden Winkel in den Endpunkten einer beliebig großen Strecke anlegt. In diesem wie in allen anderen Fällen ist die Größe der Winkel an § 18, 1 gebunden. Wenn zwei Winkel gegeben sind, ist auch der dritte bestimmt. Es gibt also unendlich viele Dreiecke, welche in zwei oder drei Winkeln übereinstimmen:

Ein Dreieck ist also durch zwei Stücke nicht bestimmt, und nicht durch drei Winkel.

3) Es sind drei Stücke gegeben:

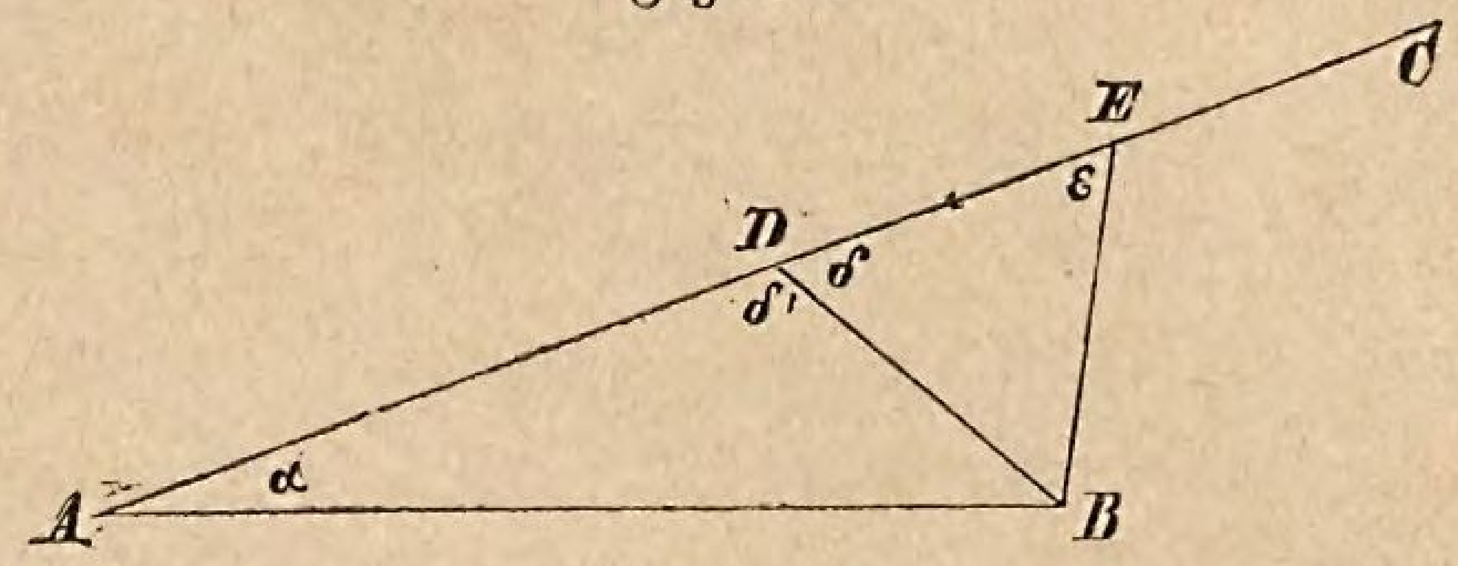
a) Drei Winkel. Das Dreieck ist nicht bestimmt, wie wir eben gesehen haben.

b) Eine Seite und zwei Winkel. Wenn beide Winkel der gegebenen Seite anliegen sollen, so zeichne ich die Seite hin und lege die Winkel in den Endpunkten an. Das Dreieck ist bestimmt. Ist dagegen nur der eine Winkel ein anliegender, der andere der gegenüberliegende, so ist durch die beiden der zweite anliegende, da er ja jene zu 2 R ergänzen muß, ebenfalls bestimmt, mithin auch das Dreieck.

c) Zwei Seiten und ein Winkel. Der Winkel ist entweder der ein-

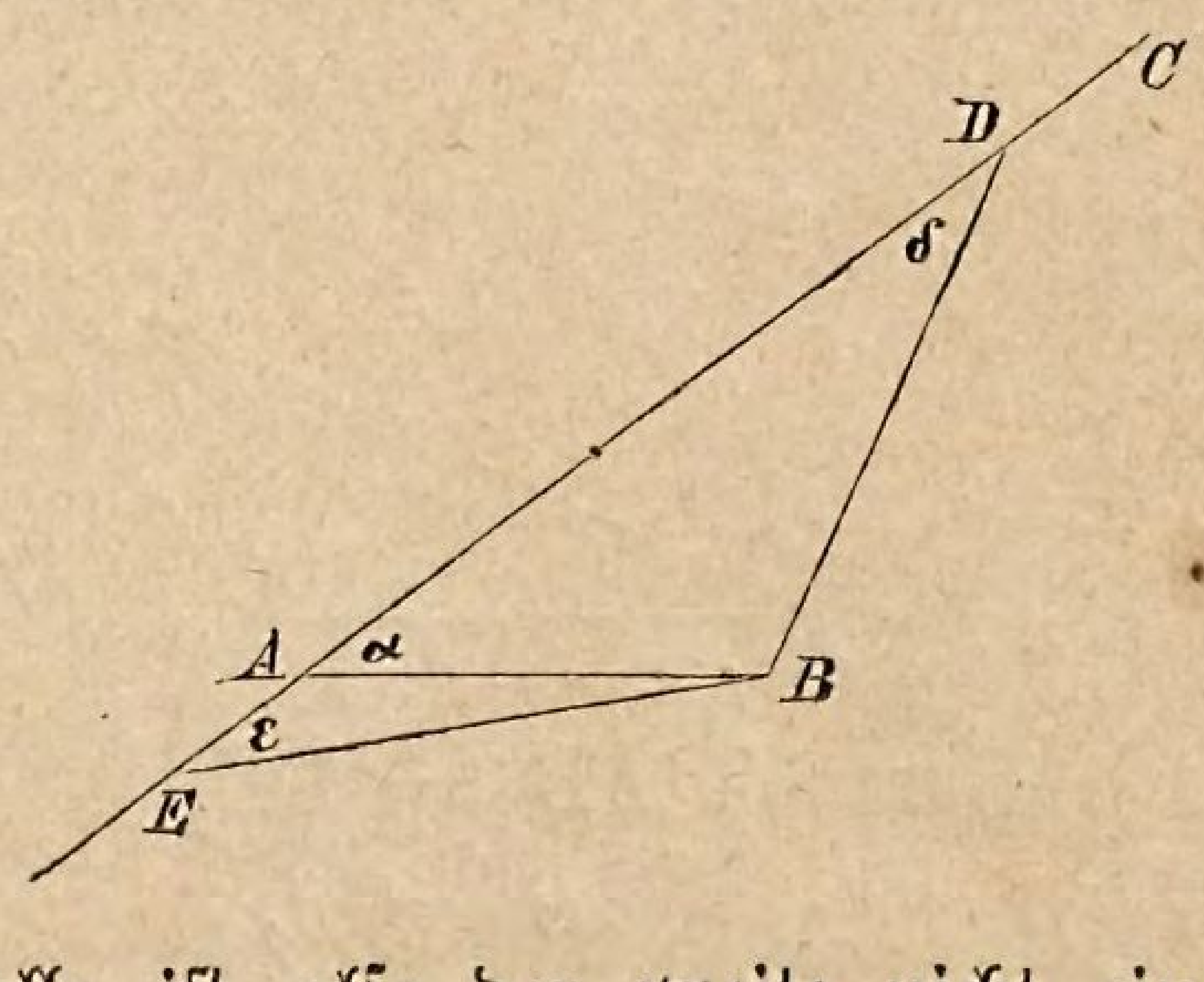
geschlossene oder ein nicht eingeschlossener. Im ersteren Falle zeichne ich die erstere Seite hin, lege in dem einen Endpunkt den gegebenen Winkel an und mache den neuen Schenkel der gegebenen zweiten Seite gleich. Alsdann ist das Dreieck vollständig bestimmt. Im zweiten Falle mache man den einen Schenkel des gegebenen Winkels gleich der einen Seite. Es sei AB (Fig. 38) die eine gegebene Seite und α der gegebene Winkel. Nun gibt es im Allgemeinen (§ 22, 3) zwei Punkte auf AC, deren Entfernungen von B gleich der gegebenen zweiten Seite. Diese Punkte müssen, wenn ihre Entfernungen von B kleiner als BA sind, beide auf derselben Seite von BA liegen, in Fig. 38 oberhalb (vergl. Fig. 33). Es seien D und E. Alsdann ist, weil BD = BE, $\delta = \varepsilon$, mithin $\delta < R$, und $\varepsilon < R$, folglich $\delta' > R$ als Nebenwinkel eines spitzen Winkels. Wenn also der gegebene Winkel der kleineren von den gegebenen Seiten gegenüberliegt, so gibt es zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Bei dem einen ist der zweite nicht eingeschlossene Winkel ein stumpfer, bei dem anderen ein spitzer. Stimmen also zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie congruent, wenn die anderen nicht eingeschlossenen Winkel entweder beide spitz oder beide stumpf sind. Solche Winkel nennt man gleichartig.

Fig. 38.



Wenn dagegen (Fig. 39) der gegebene Winkel der größeren von den beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt, so liegen die beiden Punkte der Geraden AC, die von B um die gegebene zweite Seite entfernt sind, auf verschiedenen Seiten von AB. Es seien die Punkte D und E. Da hier das Dreieck ABE den Winkel α nicht hat, so gibt es nur ein Dreieck (ABD), welches die gegebenen Stücke enthält. Da $\delta = \varepsilon$, so ist $\delta < R$. In diesem Falle ist also der zweite nicht eingeschlossene Winkel immer spitz. In Fig. 38 und 39 werden die Punkte D und E erhalten, wenn man um B mit der gegebenen zweiten Seite einen Kreis beschreibt (s. § 7, Fig. 2).

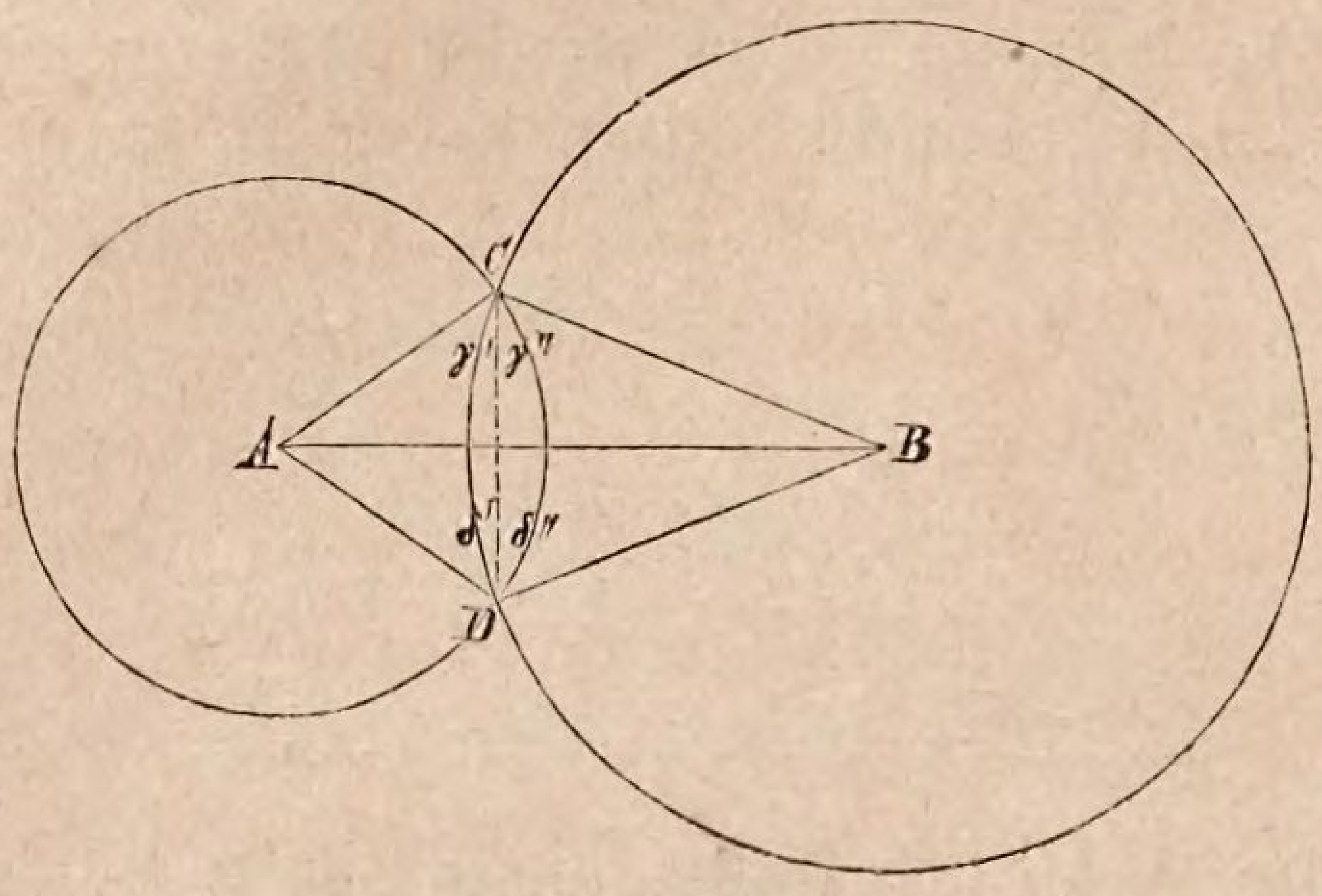
Fig. 39.



d) Drei Seiten. Man zeichnet die größte Seite hin. Es sei AB (Fig. 40).

Alsdann beschreibt man um A mit der zweiten und um B mit der dritten Seite Kreise. Diese schneiden sich in den beiden Punkten C und D, wofern die beiden Seiten zusammengenommen größer sind als AB, da alsdann die beiden Kreise nothwendig zum Theil in einander fallen. In einem dritten Punkte C′ aber können sie sich nicht schneiden; denn verbinden wir C′ oberhalb AB mit C, so kann nicht zugleich ∢ AC′C = ACC′ und ∢ BC′C = BCC′ sein.

Fig. 40.



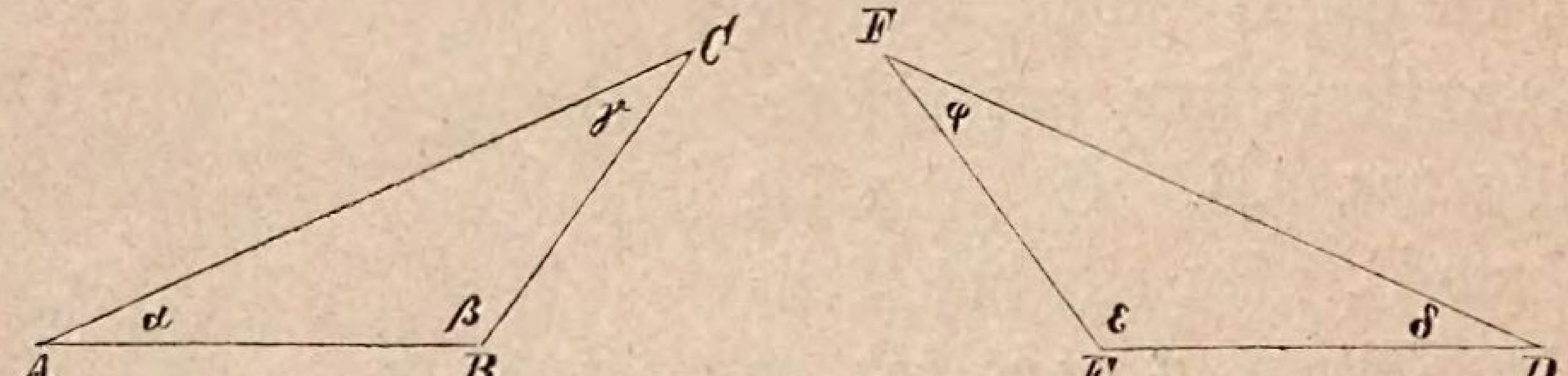
Es gibt also zwei Dreiecke: △ ABC und △ ABD, welche die gegebenen Seiten enthalten. Verbindet man aber C mit D, so erhält man zwei gleichschenklige Dreiecke △ ACD und △ BCD. Es ist daher $\gamma' = \delta'$ und $\gamma'' = \delta''$; mithin $\gamma' + \gamma'' = \delta' + \delta''$, oder ∢ ACB = ADB. Die Dreiecke ACB und ADB stimmen also, abgesehen von der dritten Seite, in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also nach 3 c) congruent. Durch drei Seiten ist also ein Dreieck bestimmt.

§ 26.

Nach § 25 liefert 3 b) zwei, 3 c) zwei und 3 d) einen Congruenzsatz. Es sind folgende:

1. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (Fig. 41).

Fig. 41.



Voraussetzung. AB = DE,

$\alpha = \delta$,

$\beta = \varepsilon$.

Beh. △ ABC ≅ DEF.

Bew. Zum Beweise legen wir das Dreieck DEF so auf △ ABC, daß DE die gleiche Seite AB deckt, und zwar so, daß D auf A und E in B fällt. Alsdann muß DF die Richtung von AC nehmen, weil $\delta = \alpha$

n. V., und EF die Richtung von BC, weil $\varepsilon = \beta$ n. V. Da nun DF in AC und EF in BC fällt, so muß, da zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können, F in C fallen. Die Dreiecke decken sich also und sind mithin congruent.

Was nun die in der Voraussetzung nicht vorkommenden Stücke betrifft, so decken sich die den gleichen Seiten AB und DE gegenüber liegenden Winkel γ und φ, sowie die den gleichen Winkeln α und δ gegenüber liegenden Seiten BC und EF und die den gleichen Winkeln β und ε gegenüber liegenden Seiten AC und DF. Wir erhalten also den Satz: In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten und gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

2. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel (Fig. 41).

Vorauss. AB = DE,
$\alpha = \delta$,
$\gamma = \varphi$.

Beh. $\triangle ABC \cong DEF$.

Bew. Da die beiden Dreiecke nach der Voraussetzung in zwei Winkeln übereinstimmen ($\alpha = \delta$, $\gamma = \varphi$), so stimmen sie auch in dem dritten überein. Es ist also auch $\beta = \varepsilon$. Wir haben also:

$$AB = DE,$$
$$\alpha = \delta,$$
$$\beta = \varepsilon.$$
$$\overline{\triangle ABC \cong DEF \text{ (n. 1).}}$$

3. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (Fig. 41).

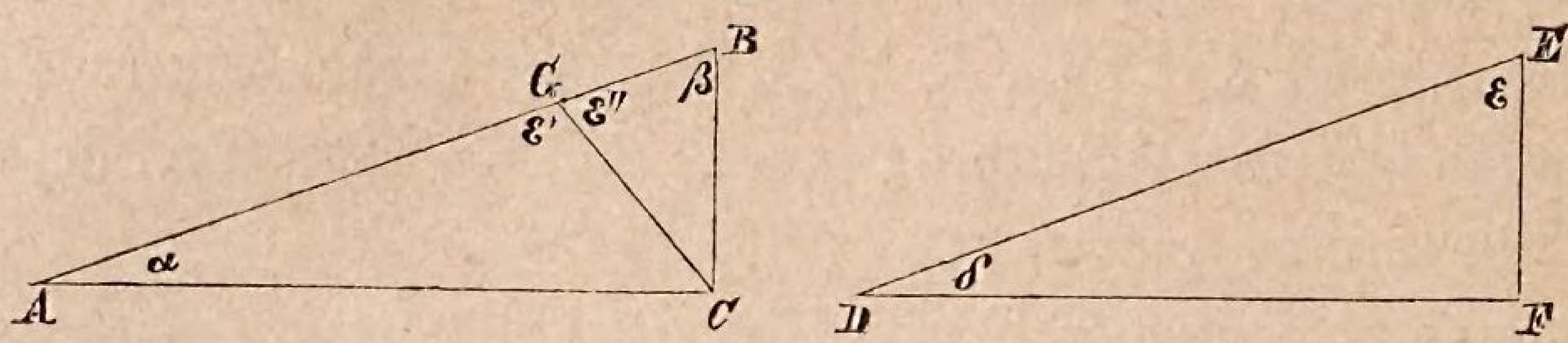
Vorauss. AB = DE,
AC = DF,
$\alpha = \delta$.

Beh. $\triangle ABC \cong DEF$.

Bew. Zum Beweise lege ich $\triangle DEF$ so auf $\triangle ABC$, daß DE die gleiche Seite AB deckt, und zwar so, daß D in A und E in B fällt. Alsdann muß DF die Richtung von AC nehmen, weil $\alpha = \delta$ n. V. Mithin fällt F in C, da DF = AC n. V. Die Dreiecke decken sich also und sind mithin congruent.

4. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel, die beiden anderen nicht eingeschlossenen Winkel aber gleichartig sind (Fig. 42).

Fig. 42.

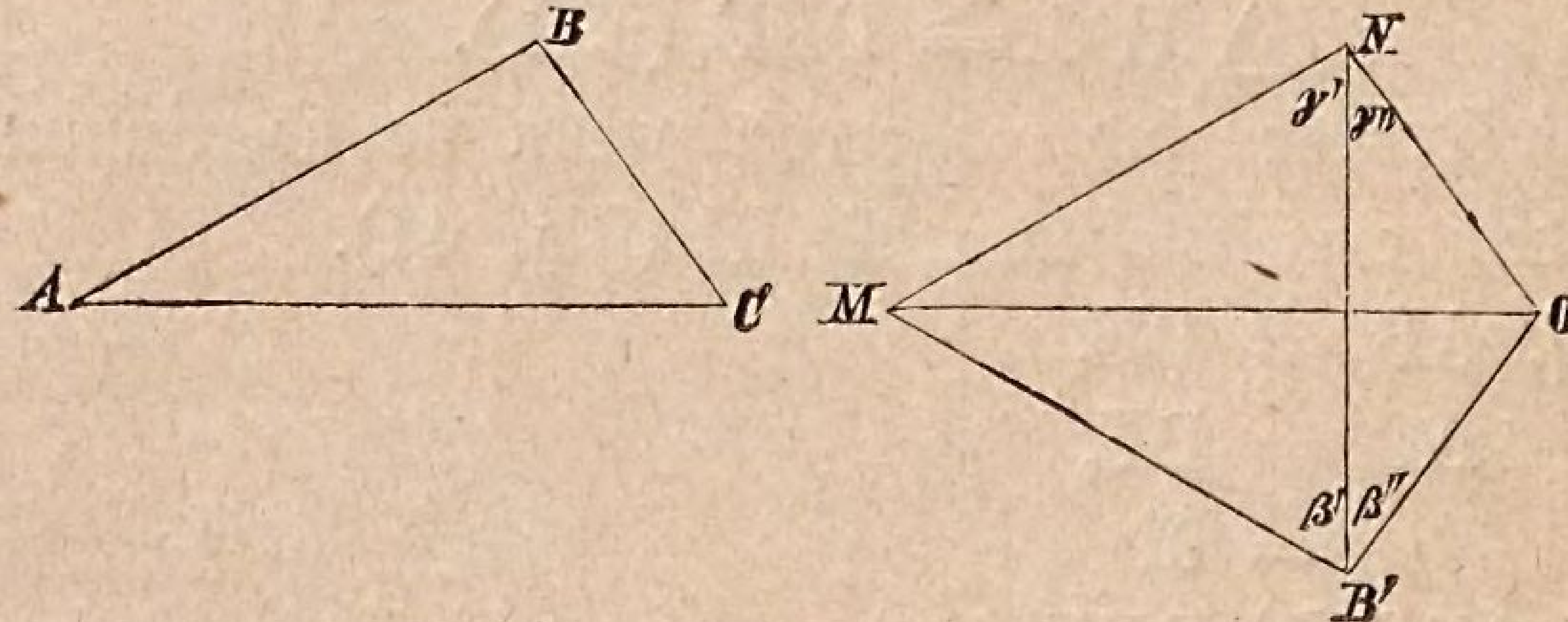


Vorauss. AC = DF,
BC = EF,
$\alpha = \delta$,
β gleichartig ε, d. h. beide sind stumpf oder beide spitz.
Beh. $\triangle$ABC $\cong$ DEF.

Bew. Zum Beweise lege ich $\triangle$ DEF so auf $\triangle$ABC, daß DF die gleiche Seite AC deckt. Dann muß DE die Richtung von AB nehmen, da $\alpha = \delta$ n. V. Gesetzt nun E fiele nicht in B, sondern in G. Alsdann wäre AGC die neue Lage von $\triangle$ DEF, und mithin $\varepsilon' = \varepsilon$, GC = EF = BC. Mithin, da GC = BC, $\beta = \varepsilon''$, also $\beta <$ R, und $\varepsilon'' <$ R. Wenn aber $\varepsilon'' <$ R., so ist sein Nebenwinkel ε' größer als R. Ist aber $\varepsilon' >$ R, so ist auch $\varepsilon >$ R. β und ε wären also nicht gleichartig, was der Voraussetzung widerspricht. Dieser Widerspruch wird nur dann vermieden, wenn E in B fällt. Die Dreiecke decken sich also und sind mithin congruent.

5. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in allen drei Seiten (Fig. 43).

Fig. 43.



Vorauss. AB = MN,
AC = MO.
BC = NO.
Beh. $\triangle$ ABC $\cong$ MNO.

Bew. Zum Beweise lege ich die beiden Dreiecke ABC und MNO mit ihren größten Seiten AC und MO aneinander. Die neue Lage von ABC sei MB'O. Es ist MB' = AB = MN, OB' = CB = ON. Verbinden wir nun N mit B', so ist

$$\gamma' = \beta',$$
$$\gamma'' = \beta''.$$
$$\overline{\gamma' + \gamma'' = \beta' + \beta''}, \text{ oder}$$
$$\sphericalangle MNO = MB'O = ABC.$$

Es ist also

$$\left.\begin{array}{l} AB = MN \\ BC = NO \end{array}\right\} \text{n. Voraussſ.}$$
$$\sphericalangle ABC = MNO.$$
$$\overline{\triangle ABC \cong MNO \text{ (n. 3).}}$$

§ 27.

Da rechtwinklige Dreiecke selbstverständlich immer in dem Rechten übereinstimmen, so sind zwei rechtwinklige Dreiecke congruent, wenn sie übereinstimmen in 1) einer Kathete und dem anliegenden spitzen Winkel (n. § 26, 1); 2) in einer Kathete und dem gegenüber liegenden spitzen Winkel (n. § 26, 2); 3) in der Hypotenuse und einem spitzen Winkel (n. § 26, 2); 4) in den beiden Katheten (n. § 26, 3); 5) in der Hypotenuse und einer Kathete (n. § 26, 4).

Die vorhergehenden Congruenzsätze über das rechtwinklige Dreieck lassen sich in folgende zusammenfassen:

1) Rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und einem spitzen Winkel der Lage und Größe nach übereinstimmen.
2) Rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, die in beiden dieselbe Lage gegen den Rechten haben.

Da gleichschenklige Dreiecke in allen Winkeln übereinstimmen, wenn sie in einem gleichgelegenen Winkel übereinstimmen, und in zwei Seiten, wenn sie einen Schenkel gleich haben, so erhalten wir folgende Congruenzsätze für das gleichschenklige Dreieck:

1) Gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und einem Winkel, die in beiden gleiche Lagen haben.
2) Gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in der Grundlinie und einem Schenkel.

§ 28.

Untersuchen wir nun die Fälle, in welchen die gegebenen Stücke nicht hinreichen zur vollständigen Bestimmung des Dreiecks.

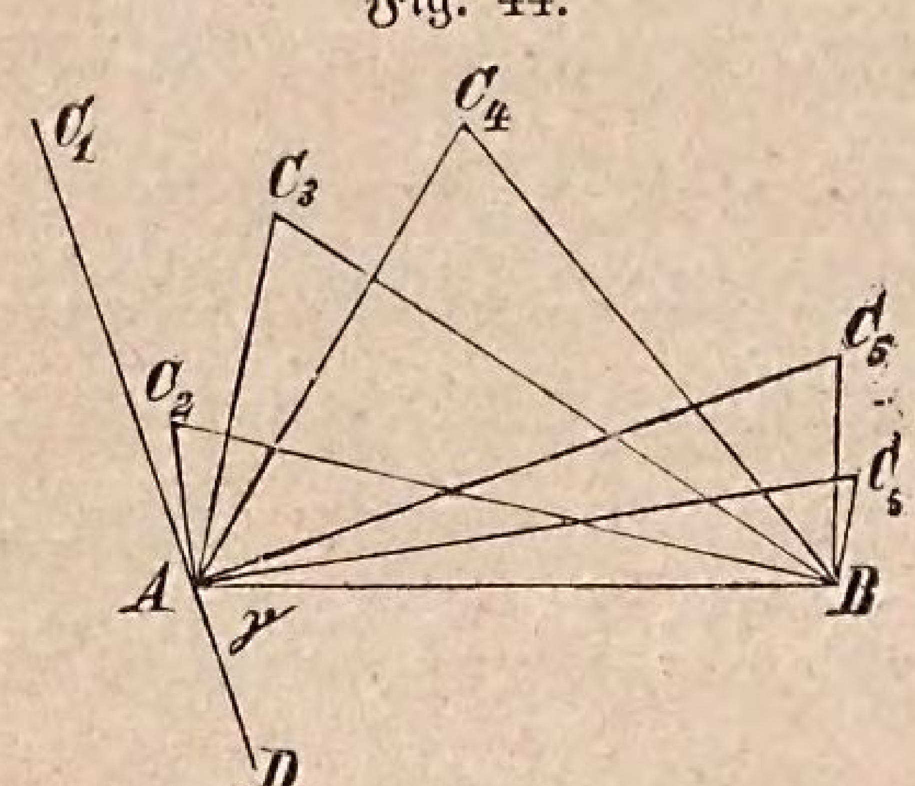
1. Wenn von einem Dreiecke nur eine Seite der Größe und Lage nach gegeben ist, so sind zwei Ecken des Dreiecks bekannt. Die dritte Ecke

kann jeder Punkt sein, der nicht in der durch die gegebene Seite bestimmten Geraden liegt. Ist die Seite nur der Größe nach gegeben, so ist die Anzahl der möglichen Dreiecke unendlichmal größer.

2. Wenn von einem Dreiecke eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben sind, so mache man die gegebene Seite zu dem einen Schenkel des gegebenen Winkels. Alsdann sind zwei Ecken des Dreiecks bestimmt, die dritte Ecke liegt auf dem zweiten Schenkel, ohne näher bestimmt zu sein. Man sagt alsdann, dieser Schenkel sei der geometrische Ort für die dritte Ecke des Dreiecks. (Unter dem geometrischen Ort versteht man den Inbegriff derjenigen Punkte, welche dieselbe Bedingung erfüllen.)

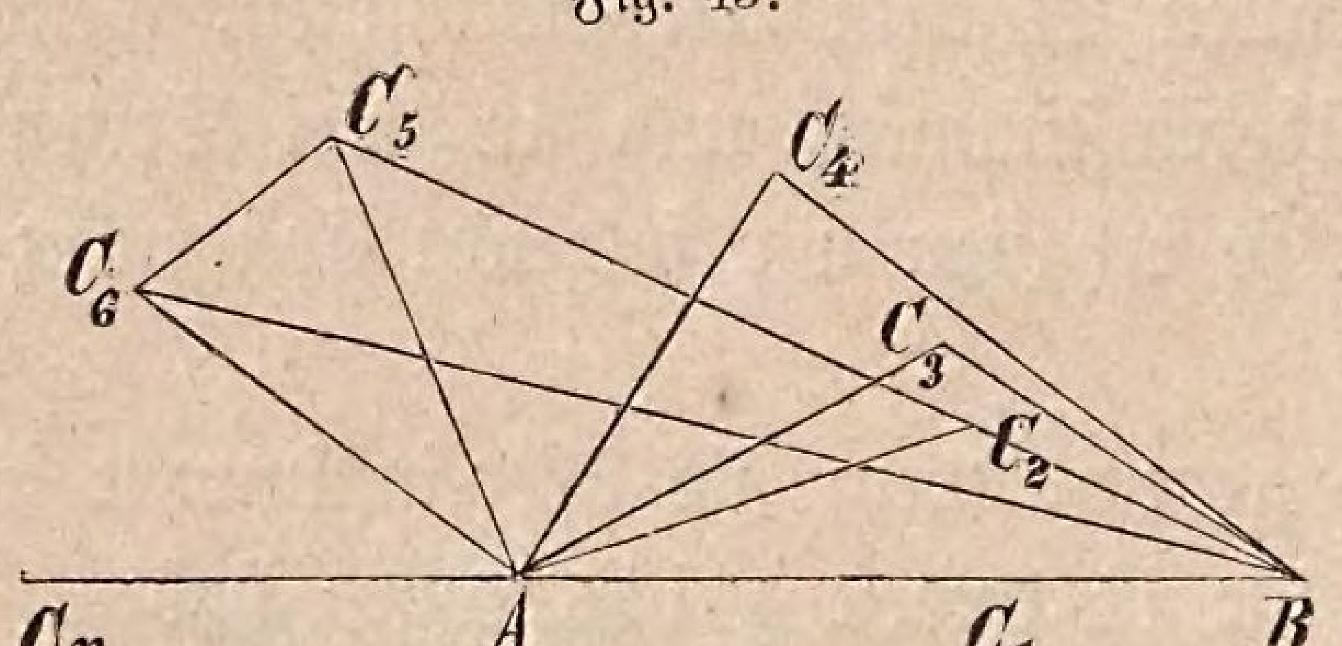
3. Es seien von einem Dreiecke eine Seite AB (Fig. 44) und der gegenüberliegende Winkel $\gamma = \measuredangle$ BAD gegeben. Die veränderlichen Winkel bei A und B heißen α und β. Sie sind an die Bedingung geknüpft, daß $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R. Ist daher $\alpha + \gamma = 2$ R, so ist $\beta = 0$. Alsdann liegt die Spitze C des Dreiecks unendlich nahe bei A, und zwar in der Richtung AC_1 von A, wenn $\measuredangle$ C_1AB der Supplementwinkel von γ ist. Ist dagegen $\beta + \gamma = 2$ R, so ist $\alpha = 0$, und die Spitze fällt in B. C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 sind mittlere Lagen der Spitze C. Der geometrische Ort der Spitzen der verlangten Dreiecke ist also eine krumme Linie, die durch A und B geht, und die wir später kennen lernen werden.

Fig. 44.



4. Es seien von einem Dreiecke zwei Seiten, AB und AC (Fig. 45), gegeben.

Fig. 45.



Wir erhalten alsdann alle möglichen verschiedenen Lagen der Spitze C des Dreiecks, wenn wir den Winkel α, den die Linien AB und AC mit einander bilden, von 0 bis 2 R wachsen lassen, wobei wir den Schenkel AB als festliegend ansehen können, also mit AC = AC_1 um A einen Kreisbogen beschreiben, bis AC in die Lage AC_n kommt, wenn $\measuredangle$ $C_nAC_1 = 2$R. Es seien AC_1, AC_2, AC_3, AC_4, AC_5, AC_6, AC_n verschiedene Lagen von AC. Nach § 24, 2 ist in den Dreiecken AC_3B und AC_4B die Summe $(AC_3 + BC_3) < (AC_4 + BC_4)$, folglich, da $AC_3 = AC_4$, ist $BC_3 < BC_4$. Fällt dagegen die Spitze C_5 nicht innerhalb des Dreiecks AC_6B, bei welchem

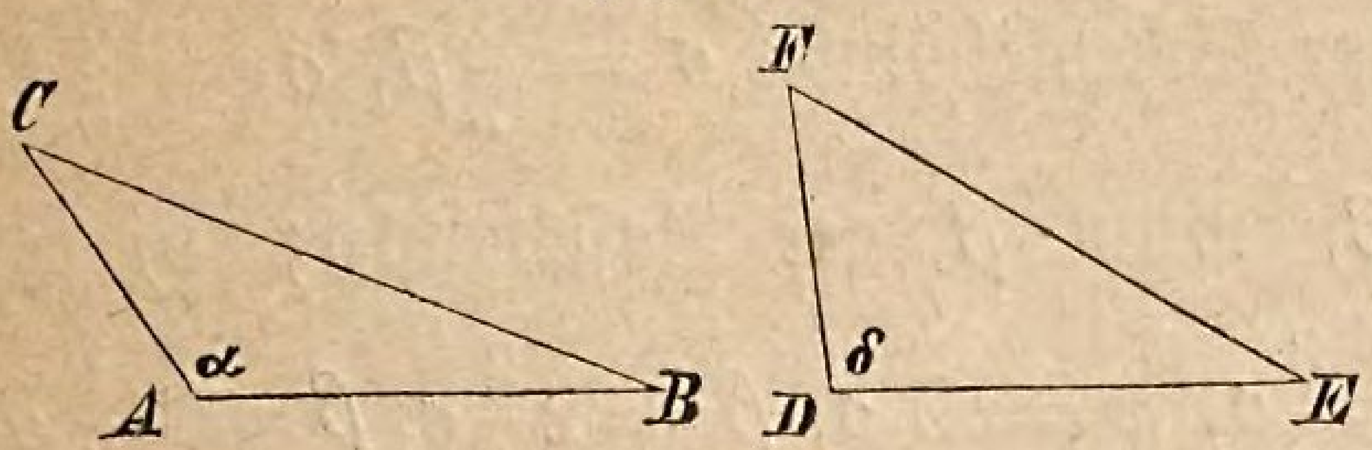
der Winkel α größer als beim Dreieck AC_5B, so verbinden wir, um die Seiten BC_5 und BC_6 zu vergleichen, die Punkte C_5 und C_6 durch eine gerade Linie. Da aber $AC_5 = AC_6$, so ist $\sphericalangle AC_6C_5 = AC_5C_6$. Mithin $\sphericalangle C_5C_6B < C_6C_5B$, also auch $BC_5 < BC_6$. Je größer also Winkel α, um so größer ist auch seine Gegenseite. Wir erhalten also den Lehrsatz:

5. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so ist von den zwei dritten Seiten diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüber liegt.

Legt man zum Beweise die beiden Dreiecke so auf einander, daß zwei gleiche Seiten sich decken, so sind drei verschiedene Lagen möglich (Fig. 45): 1) $\triangle ABC_2$ und $\triangle ABC_5$; 2) $\triangle ABC_3$ und ABC_4; 3) $\triangle ABC_5$ und $\triangle ABC_6$. Der Beweis ist dann, wie bei der obigen Entwicklung.

Da sich aus Fig. 45 ergibt, daß für alle möglichen Werthe von α bei constanter Größe der einschließenden Seiten dem größeren Winkel eine größere Gegenseite entspricht, so ist auch der umgekehrte Satz gültig:

Fig. 46.



6. Wenn zwei Dreiecke übereinstimmen in zwei Seiten, die dritten Seiten aber ungleich sind, so liegt der größeren dritten Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Dieser Lehrsatz läßt sich leicht indirekt beweisen. Wenn (Fig. 46) $AB = DE$, $AC = DF$, $BC > EF$, so wird behauptet, daß $\alpha > \delta$. Gesetzt α wäre nicht größer als δ, so müßte entweder $\alpha = \delta$, oder $\alpha < \delta$. Wenn $\alpha = \delta$, so wären die Dreiecke (§ 26, 3) congruent, und mithin $BC = EF$. Wäre $\alpha < \delta$, so müßte $BC < FE$ sein (n. Lehrs. 5). Beides widerspricht der Voraussetzung. Also muß $\alpha > \delta$ sein.

Aufgaben.

§ 29.

26. Die Innenwinkel eines Dreiecks heißen α, β, γ, die entsprechenden Außenwinkel α', β', γ'. Wie groß sind α, α', β, β', γ, γ', wenn a) die drei Außenwinkel, b) die drei Innenwinkel gleich sind; c) $\alpha = 2\beta$, $\gamma = 3\beta$; d) $\alpha = \beta$, $\gamma = \frac{5}{6}\beta$; e) $\beta' = \frac{2}{3}\alpha'$, $\gamma' = 1\frac{1}{2}\beta'$; f) $\alpha' = 1\frac{2}{3}R$, $\gamma' = 1\frac{1}{2}\beta'$; g) $\alpha = \frac{3}{4}R$, $\beta = 1\frac{2}{3}\beta'$; h) $\alpha' = 1\frac{3}{4}\beta$, $\gamma = 1\frac{1}{2}\alpha$?

27. Die Innenwinkel eines Dreiecks heißen α, β, γ, der Nebenwinkel von β, also ein Außenwinkel des Dreiecks, heißt β'. Wie groß sind α, β, γ, β', wenn a) $\alpha = \frac{2}{3}$ R, $\gamma = \frac{3}{4}$ R; b) $\alpha = \frac{5}{6}$ R, $\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}$ R; c) $\beta' = 2\,\gamma$, $\beta = \frac{2}{5}\beta'$; d) $\alpha = \frac{4}{5}\gamma$, $\beta = \frac{3}{5}\gamma$; e) $\alpha = 1\frac{1}{7}\beta$, $\gamma = \frac{5}{8}\alpha$; f) $\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{4}{5}\beta'$, $\alpha = 1\frac{1}{2}\beta$; g) $\alpha + \beta = \frac{6}{7}\beta'$, $\gamma + \beta = \beta'$; h) $\alpha + \frac{1}{4}\gamma = 1\frac{4}{7}\beta$, $\gamma + \frac{1}{3}\alpha = 1\frac{4}{7}\beta$?

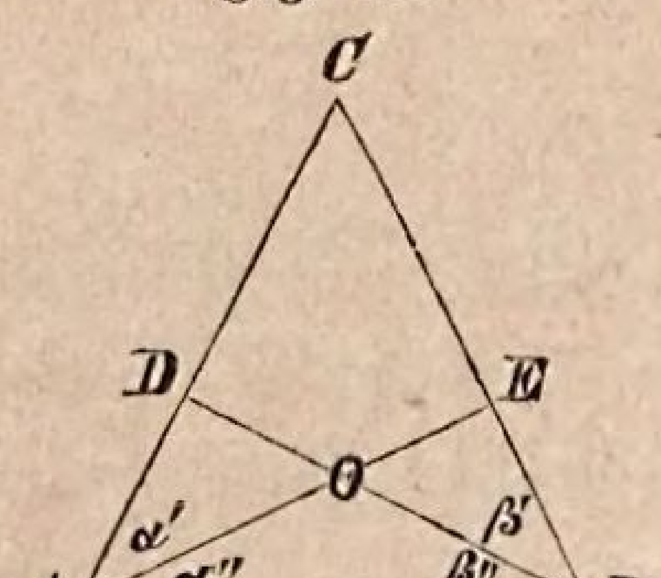
28. Die beiden Innenwinkel α und β eines Dreiecks sind gegeben. Wie groß sind γ und die Außenwinkel α', β', γ'?

29. Im gleichschenkligen Dreieck nennen wir die zwei gleichen Seiten Schenkel, die dritte Seite Grundlinie, die der Grundlinie anliegenden Winkel Basiswinkel und den von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel Schenkelwinkel. In einem gleichschenkligen Dreieck sind nun: a) der Schenkelwinkel gleich einem Basiswinkel; b) der Schenkelwinkel gleich $\frac{1}{2}$ R, $\frac{3}{4}$ R, $1\frac{1}{2}$ R, $1\frac{2}{5}$ R; c) ein Basiswinkel gleich $\frac{3}{5}$ R, $\frac{4}{5}$ R, $\frac{2}{3}$ R, $\frac{1}{2}$ R, $\frac{5}{8}$ R, 0,25 R, 0,625 R; d) der Schenkelwinkel $\sigma = \frac{1}{2}\beta$, $\sigma = \frac{5}{6}\beta$, $\sigma = \frac{3}{4}\beta$, $\sigma = 1\frac{1}{2}\beta$, $\sigma = 2\frac{2}{3}\beta$, wenn β der Basiswinkel; e) der Basiswinkel $\beta = \frac{3}{4}\sigma$, $\beta = \frac{7}{8}\sigma$, $\beta = \frac{8}{9}\sigma$, $\beta = 2\,\sigma$, $\beta = 2\frac{3}{4}\sigma$, $\beta = 3\frac{1}{3}\sigma$, wenn σ wiederum den Schenkelwinkel bedeutet. Wie groß sind die einzelnen Winkel?

30. Wie groß sind die Winkel des gleichschenkligen Dreiecks, wenn a) ein Basiswinkel $= \beta$, b) der Schenkelwinkel $= \sigma$ gegeben ist?

31. Wie groß sind die Winkel des gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Schenkelwinkel und ein Basiswinkel zusammengenommen gleich $1\frac{3}{4}$ R, $1\frac{5}{8}$ R, $1\frac{1}{4}$ R, $1\frac{1}{10}$ R, gleich α sind?

Fig. 47.



32. Fig. 47 ist AC = BC, und AE und BD sind Schenkelhöhen, d. h. AE $\perp$ BC, und BD $\perp$ AC. Wie verhält es sich a) mit dem Größenverhältnisse dieser Höhen, b) mit den Winkeln α' und β', c) mit den Winkeln α'' und β'', d) mit AO und BO, e) mit OD und OE, f) mit den Dreiecken ODC und OEC, g) unter welchen Winkeln schneidet die verlängerte CO, die Grundlinie AB, und wie theilt sie dieselbe?

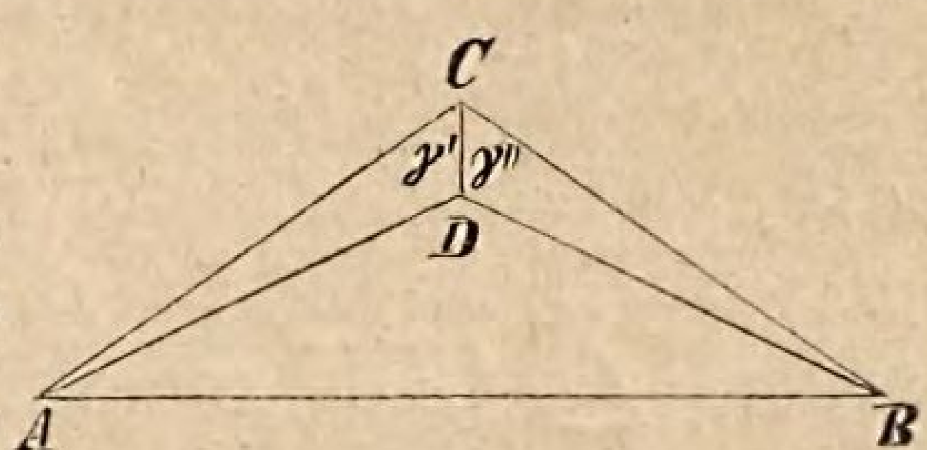
Anmerkung. Will man untersuchen, ob zwei Strecken einander gleich sind, so sehe man zu, ob sie Seiten eines Dreiecks oder zweier Dreiecke sind oder sich zu solchen machen lassen. Sie sind alsdann gleich, wenn sie in demselben Dreiecke oder in congruenten Dreiecken gleichen Winkeln gegenüber liegen. Die Gleichheit von Winkeln wird bewiesen, indem man zeigt, daß sie Parallel- oder Antiparallelwinkel sind oder in demselben oder in congruenten Dreiecken gleichen Seiten gegenüber liegen.

33. In wie viel Punkten schneiden sich die Höhen eines gleichschenkligen Dreiecks?

34. Wie groß sind die einzelnen Winkel eines gleichseitigen Dreiecks?

35. Wie verhält es sich mit dem Größenverhältniß der Höhen eines gleichseitigen Dreiecks?

Fig. 48.



36. (Fig. 48) AC = BC, und AD = BD. Vergleiche die Dreiecke ADC und BDC mit einander und die Winkel γ' und γ''.

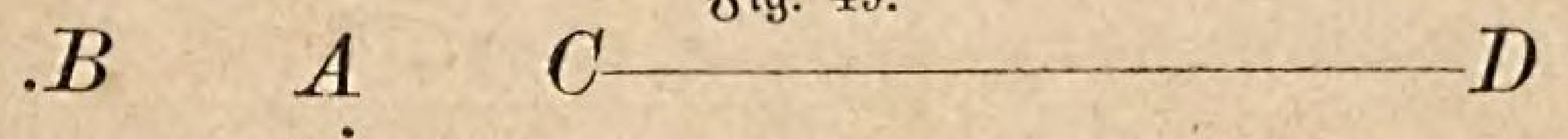
37. Es sei (Fig. 48) AC = BC und AD = BD. Unter welchen Winkeln schneidet die verlängerte CD die Strecke AB, und wie theilt sie dieselbe?

38. Welche Linie ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von A und B (Fig. 48) gleiche Entfernungen hat?

39. Kann es auf derselben Seite von AB zwei Punkte geben, deren vier Verbindungslinien mit A und B gleich sind?

40. Alle Punkte zu suchen, die von dem Punkte A (Fig. 49) die

Fig. 49.



gegebene Entfernung CD haben.

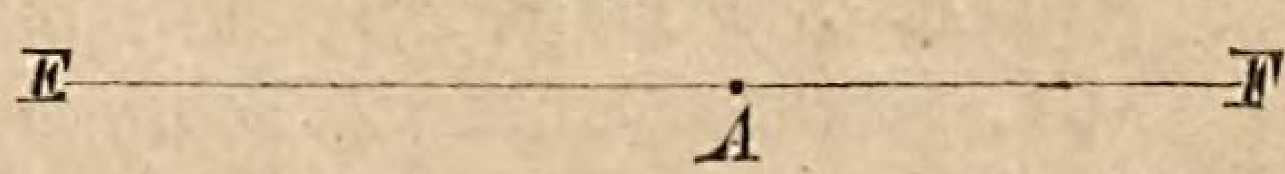
41. Alle Punkte zu suchen, die von A und B (Fig. 49) die gegebene Entfernung CD haben. — Wann gibt es solche Punkte und wie viele, da A und B jede beliebige Entfernung haben können, und CD jede Größe haben kann?

42. Ueber CD (Fig. 49) ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.

43. Ueber CD als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren.

44. Auf der Geraden EF (Fig. 50) zwei Punkte zu suchen, die von dem gegebenen Punkte A der Geraden gleiche Entfernungen haben.

Fig. 50.

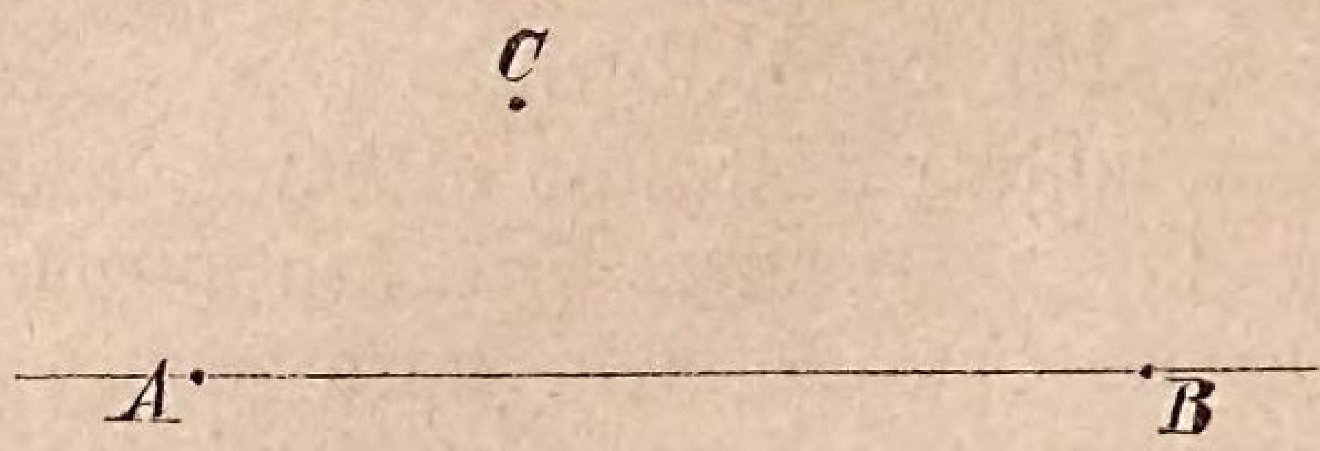


45. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, dessen Grundlinie in EF (Fig. 50) liegt und in A halbirt ist.

46. In A (Fig. 50) auf EF eine Senkrechte zu errichten.

47. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, dessen Grundlinie in AB (Fig. 51) und dessen Spitze in C liegt.

Fig. 51.



48. Zwei gleichschenklige Dreiecke zu construiren, deren gemeinschaftliche Grundlinie in der Geraden AB (Fig. 51) liegt, und wovon das eine seine Spitze in C hat.

49. Von einem gegebenen Punkte C (Fig. 51) auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen.

50. Eine gegebene Strecke AB zu halbiren.

51. Einen gegebenen Winkel ACB (Fig. 48) zu halbiren.

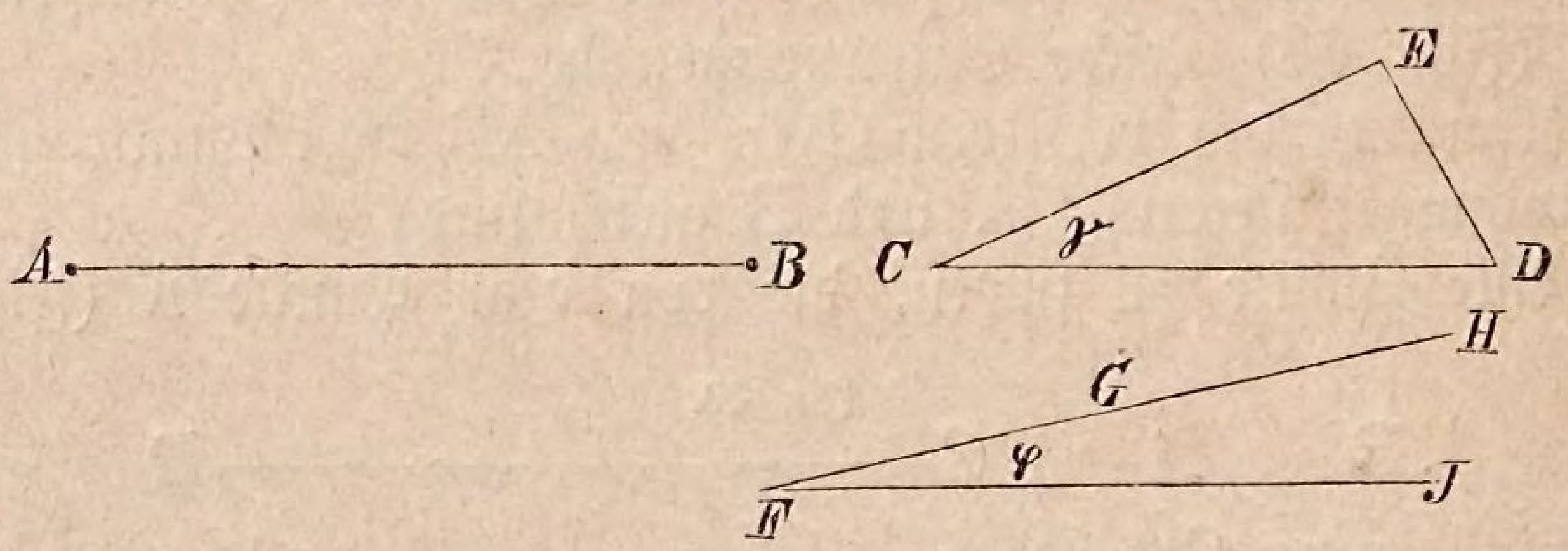
52. Einen Winkel zu construiren, der gleich ist 1 R, $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{4}$ R, $\frac{3}{4}$ R, $\frac{3}{8}$ R, $\frac{2}{3}$ R, $\frac{4}{3}$ R, $\frac{1}{3}$ R.

53. Einen rechten Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen.

54. Ueber einer gegebenen Strecke AB mit zwei gegebenen Strecken C′D′ und E′F′ ein Dreieck zu construiren.

55. Im Punkte A an AB (Fig. 52) ein Dreieck zu construiren, welches $\triangle$ CDE congruent ist.

Fig. 52.



56. Im Punkte A an AB (Fig. 52) einen Winkel anzulegen, der gleich dem gegebenen Winkel φ ist.

57. Im Punkte G (Fig. 52) an GH einen Winkel anzulegen, welcher dem gegebenen Winkel φ gleich ist.

58. Von einem Dreiecke sind die beiden Winkel α und β gegeben. Durch Construktion den dritten Winkel γ, $\frac{1}{2}\gamma$ und die halben Außenwinkel zu finden.

59. Durch den Punkt C (Fig. 51) mit AB eine Parallele zu ziehen.

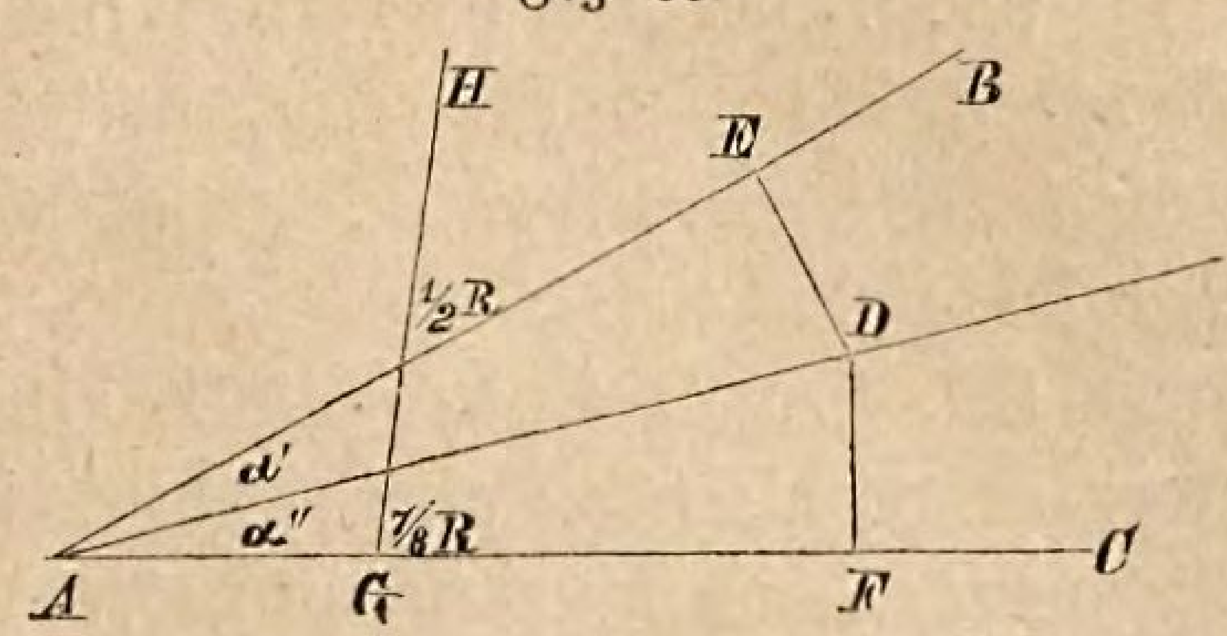
60. Den geometrischen Ort des Punktes zu construiren, der von den Punkten A und B gleiche Entfernungen hat.

61. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von den drei Punkten A, B und C gleiche Entfernungen hat.

62. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von A und B gleiche Entfernungen und von C die Entfernung e hat.

63. Den geometrischen Ort des Punktes zu construiren, der von den Schenkeln des Winkels BAC (Fig. 53) gleiche Entfernungen hat.

Fig. 53.



Anmerkung. Bei der Lösung einer Aufgabe beachte man Folgendes: 1) Man mache sich die in der Aufgabe vorkommenden Begriffe klar. 2) Man frage sich, welche Sätze handeln von den in der Aufgabe vorkommenden Gegenständen. 3) Wenn sich die Construktion trotz klarer Einsicht in das, was gegeben ist, und in das, was verlangt wird, nicht ergeben will, indem die gegebenen Stücke sich nicht unmittelbar construiren lassen, so mache man eine Analysis, d. h. man denke sich die Aufgabe gelöst, am Ziele also angekommen, und nun analysire, zerlege man das verlangte Ganze, um aus den sich zu dem Ganzen zusammensetzenden Theilen den Weg aufzufinden, der zum Ziele führt, also an Stelle der gegebenen Bedingungen, die sich nicht direkt construiren lassen, solche zu finden, die zu demselben Ziele führen, aber sich direkt construiren lassen. Z. B. in der vorliegenden Aufgabe Nr. 63 sei D ein Punkt, welcher von AB und AC gleiche Entfernungen hat. Fälle ich also von D auf AB und AC die Senkrechten DE und DF, so ist DE = DF. Nun kennen wir aber weder E noch F noch D. Verbinde ich aber D mit A durch eine gerade Linie, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken AED und AFD AD = AD und DE = DF, mithin $\triangle$ AED $\cong$ AFD, folglich $\alpha' = \alpha''$. Fälle ich nun von irgend einem Punkte der Geraden AD Senkrechte auf AB und AC, so sind dieselben als entsprechende Seiten in congruenten Dreiecken einander gleich. Also ist die Halbirungslinie eines Winkels der geometrische Ort des Punktes, der von den Schenkeln gleiche Entfernungen hat.

64. Eine Gerade GH (Fig. 53) schneidet die Schenkel des Winkels BAC unter den Winkeln a) $\frac{1}{2}$ R und $\frac{7}{8}$ R, b) β und γ. Wie groß ist $\alpha = \sphericalangle$ BAC?

65. Die Schenkel eines Winkels durch eine Gerade so zu schneiden, daß der gegebene Winkel a) Schenkelwinkel, b) Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks wird.

66. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß der gegebene Winkel α a) Schenkelwinkel, b) Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks wird.

Anmerkung. Wenn bei einer Aufgabe mehrere Bedingungen zugleich erfüllt werden sollen, so kömmt man im Allgemeinen zum Ziele, wenn man die eine nach der anderen berücksichtigt. In Aufgabe 66 zieht man zuerst eine Gerade, wodurch ein gleichschenkliges Dreieck entsteht; dann erst eine Gerade durch den gegebenen Punkt, die jene Bedingung erfüllt.

67. Zwei convergirende Geraden sollen nicht bis zum Durchschnittspunkte verlängert werden. Wie erhält man durch Construktion den Winkel, unter welchem sie sich schneiden?

68. Zwei convergirende nicht bis zum Durchschnittspunkte verlängerte Geraden sollen durch eine dritte Gerade so geschnitten werden, daß sie gegen die Schneidelinie gleich geneigt sind (daß die zusammengehörigen Winkel gleich sind).

69. Durch einen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie gegen zwei convergirende, aber nicht bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängerte Geraden gleiche Neigung hat, die zusammengehörigen Winkel also gleich sind.

70. Eine Gerade zu ziehen, welche den Winkel halbirt, den zwei convergirende Geraden mit einander bilden, ohne daß man die Geraden bis zum Durchschnittspunkte verlängert.

71. Den Punkt einer Geraden zu finden, welche von zwei Geraden gleich weit entfernt ist.

72. Den Punkt zu finden, welcher von zwei Geraden gleich weit entfernt ist und von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat.

73. Den Punkt einer Geraden zu finden, der von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

74. Wenn (Fig. 54) von C aus ein Lichtstrahl (oder irgend ein elastischer Körper) AB in D, F u. s. w. trifft, so wird der Strahl so zurückgeworfen, daß $\delta = \delta'$, $\varphi = \varphi'$ u. s. w. Von welchem Punkte scheinen daher alle reflektirten Strahlen herzukommen, oder welcher Punkt ist das Bild von C, d. h. in welchem Punkte schneiden sich die verlängerten Geraden ED, GF u. s. w.?

Fig. 54.



75. Fig. 54 sind die Punkte C und E und die Gerade AB gegeben. Auf AB einen Punkt D so zu bestimmen, daß $\delta = \delta'$, a) wenn C und E auf verschiedenen Seiten von AB, b) wenn sie auf derselben Seite von AB liegen.

76. Wenn (Fig. 54) $\delta = \delta'$, welche von den beiden Summen (CD + DE) und (CF + FE) ist die größere, wobei F einen beliebigen Punkt von AB bedeutet?

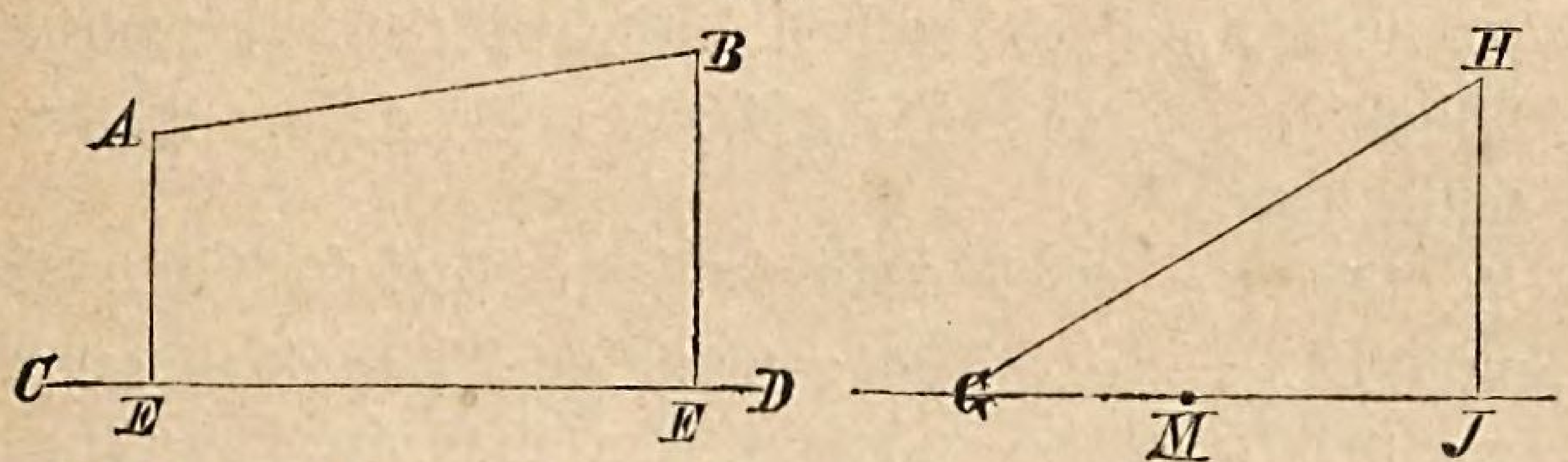
Für die folgenden Aufgaben führen wir der Kürze wegen folgende Bezeichnungen ein: Im Dreiecke ABC wird der Winkel bei A α, der Winkel bei B β, und der Winkel bei C γ genannt. Die Seite BC,

welche α gegenüber liegt, heißt a, die β gegenüberliegende Seite AC heißt b, und die γ gegenüberliegende Seite AB heißt c. Die geraden Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Halbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten heißen Mittellinien und werden mit m_a, m_b, m_c bezeichnet, je nachdem sie nach den Seiten a, b oder c gehen. Entsprechend ist die Bezeichnung der Höhen des Dreiecks, d. i. der Senkrechten von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten, h_a, h_b, h_c, der Medialen oder Winkelhalbirungslinien μ_α, μ_β, μ_γ. Im rechtwinkligen Dreiecke sei a die Hypotenuse, b und c die Katheten.

In dem gleichschenkligen Dreiecke sei a die Grundlinie, b der Schenkel oder die Scheitelseite. Demnach heißt der Winkel an der Spitze α, der Basiswinkel β.

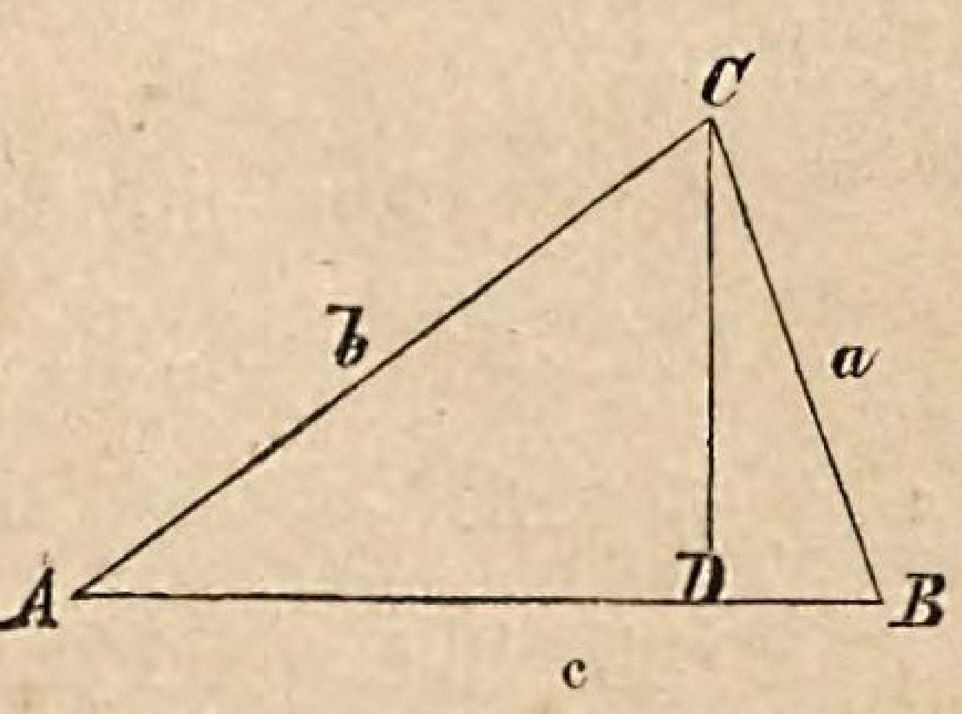
Fällt man von den Endpunkten einer Strecke AB (Fig. 55) auf eine Gerade CD die Senkrechten AE und BF, so ist der Abstand EF der Fußpunkte der Senkrechten von einander die Projektion der Strecke AB auf die Gerade CD. Ebenso ist GJ die Projektion von GH auf GM, wenn HJ $\perp$ GM.

Fig. 55.



Im Dreiecke ABC (Fig. 56) nennen wir die Projektion von Seite a auf c (die Strecke BD) ${}^aP_c$, von b auf c (AD) ${}^bP_c$ 2c.

Fig. 56.



Von einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke sind gegeben:

77. b. 78. a. 79. a + b. 80. a — b.
81. 1) h_a. 2) μ_α. 3) m_a. 82. μ_β.
83. b — h_a. 84. a — h_a. 85. μ_β — b.

Von einem rechtwinkligen Dreiecke sind gegeben:

86. b, c.
87. a, b.
88. b, γ.
89. b, β.
90. a, β.
91. 1) a, $\beta = 2\gamma$.
2) a, $\beta = 3\gamma$.
3) a, $\beta = 5\gamma$.
4) a, $\beta = \frac{3}{5}\gamma$.
92. 1) b, $\beta = 2\gamma$.
2) b, $\beta = 3\gamma$.
3) b, $\beta = 5\gamma$.
4) b, $\beta = 7\gamma$.
93. b, h_a.
94. b, μ_α.
95. b, μ_γ.
96. b, m_c.
97. b, m_b.
98. b, ${}^bP_a$.
99. ${}^bP_a$, h_a.
100. ${}^bP_a$, γ.
101. ${}^bP_a$, β.
102. ${}^bP_a$, $\beta - \gamma$.
103. a, b + c.
104. a, b — c.
105. a, $\beta - \gamma$.
106. b + c, γ.
107. b + c, β.
108. b — c, γ.

109. b — c, β.
110. a + b, γ.
111. a + b, β.
112. a — b, β.
113. a — b, γ.
114. b + c, $\beta - \gamma$.
115. b — c, $\beta - \gamma$.
116. a + b, $\beta - \gamma$.
117. a — b, $\beta - \gamma$.
118, b + $\frac{c}{2}$, m_c.
119. μ_α, β.
120. μ_α, h_a.
121. h_a, β.
122. μ_β, β.
123. μ_β, γ.
124. ${}^bP_a$ + b, γ.
125. ${}^bP_a$ + b, γ.
126. b — ${}^bP_a$, γ.
127. b — ${}^bP_a$, β.

128. Legt man in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC in A, dem Scheitel des rechten Winkels, an c den Winkel β an, wie groß ist dann das andere Stück von α, und wie wird a getheilt?

129. Wenn in einem Dreiecke die gerade Verbindungslinie des Halbirungspunktes einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke der Hälfte der halbirten Seite gleich ist, wie groß ist dann der Gegenwinkel der halbirten Seite?

130. Welches ist der geometrische Ort für den Rechtwinkelpunkt der rechtwinkligen Dreiecke, die eine gegebene Strecke zur gemeinschaftlichen Hypotenuse haben?

131. μ_α und μ_β eines rechtwinkligen Dreiecks schneiden sich in O unter dem Winkel ω, so daß AO gleich der Strecke e. Das rechtwinklige Dreieck zu construiren.

132. μ_α und μ_β eines rechtwinkligen Dreiecks bilden bei O den Winkel ω, und BO = e. Das rechtwinklige Dreieck zu construiren.

133. μ_β und μ_γ eines rechtwinkligen Dreiecks schneiden sich in O, so daß BO = e', und CO = e. Das rechtwinklige Dreieck zu construiren.

Von einem gleichseitigen Dreiecke sind gegeben:

134. a; 106. h; 107. a + h; 108. a — h; 109. h + $\frac{1}{2}$a; 110. h — $\frac{1}{2}$ a.

135. Unter welchen Winkeln schneiden sich in dem gleichseitigen Dreiecke a) die Höhen, b) die Mittellinien, c) die Medialen (siehe Aufgabe 32 und 33)?

Von einem gleichschenkligen Dreiecke sind gegeben:

136. a, b.
137. a, β.
138. b, α.
139. b, β.
140. a, α.
141. a, h_a.
142. b, h_a.
143. a, h_b.
144. b, h_b.
145. h_a, α.
146. h_a, β.
147. h_b, α.
148. h_b, β.
149. μ_β, β.
150. μ_β, α.
151. a + b, β.
152. a + b, α.
153. a — b, β.
154. a — b, α.
155. a + b, $\alpha + \beta$.
156. a — b, $\alpha + \beta$.
157. b + h_a, α.

158. $b + h_a, \beta$.
159. $b - h_a, \beta$.
160. $b - h_a, \alpha$.
161. $h_a + \frac{1}{2} a, \alpha$.
162. $h_a + \frac{1}{2} a, \beta$.
163. $h_a + \frac{1}{2} a, \alpha$.
164. $h_a - \frac{1}{2} a, \beta$.
165. $a + b, a - b$.
166. $a + 2b, \beta$.
167. $a + 2b, \alpha$.
168. $h_b, {}^aP_b$.
169. $h_b, {}^bP_b$.
170. $b, {}^bP_b$.
171. $b, {}^aP_b$.
172. $a, {}^aP_c$.
173. ${}^bP_b, \alpha$.
174. ${}^aP_b, \beta$.
175. ${}^aP_b, \alpha$.

Von einem Dreiecke sind gegeben:

176. a, β, γ.
177. a, α, β.
178. a, b, γ.
179. a, b, α.
180. a, b, c.
181. a, b, h_a.
182. a, b, h_c.
183. a, h_a, β.
184. a, h_b, β.
185. a, h_b, α.
186. h_a, β, γ.
187. h_a, α, β.
188. a, b, m_a.
189. a, m_a, γ.
190. a, m_b, γ.
191. m_a, β, γ.
192. m_a, α, β.
193. a, m_a, h_a.
194. b, m_a, h_a.
195. b, h_a, μ_α.
196. a, μ_β, β.
197. $\mu_\alpha, \alpha, \beta$.
198. $\mu_\alpha, \beta, \gamma$.
199. a, h_b, μ_β.
200. a, h_b, μ_γ.
201. h_a, μ_α, α.
202. h_a, μ_α, β.
203. h_a, μ_β, β.
204. $b, c, {}^bP_a$.
205. $b, {}^bP_a, \alpha$.
206. $b, {}^bP_a, \beta$.
207. $b, h_a, {}^cP_a$.
208. $b, h_a, {}^aP_b$.
209. $a, {}^bP_a, \gamma$.
210. $a, {}^bP_a, \alpha + \beta$.
211. $h_a, m_a, {}^bP_a$.
212. $h_a, \mu_\alpha, {}^bP_a$.
213. $h_a, {}^bP_a, \alpha$.
214. $h_a, {}^bP_a, \beta$.
215. $h_a, {}^bP_a, \alpha + \gamma$.
216. $a, {}^bP_a$.
217. $a, {}^bP_a, h_a$.
218. $h_a, {}^bP_a, {}^aP_b$.
219. $a + b, c, \gamma$.
220. $a + b, c, \alpha$.
221. $a + b, c, \alpha + \beta$.
222. $a + b, c, \alpha - \beta$.
223. $a + b, c, \beta + \gamma$.
224. $a + b, \alpha, \gamma$.
225. $a - b, \alpha, \gamma$.
226. $a - b, \beta, \gamma$.
227. $a - b, \alpha, \beta$.
228. $a - b, c, \beta$.
229. $a - b, c, \gamma$.
230. $a - b, c, \alpha + \gamma$.
231. $a + b, c, \alpha + \beta$.
232. $a - b, c, \alpha - \beta$.
233. $a + b + c, \alpha, \beta$.
234. $a + b + c, \alpha, \gamma$.
235. $a + b, h_a, {}^cP_a$.
236. $a + b, a - b, \gamma$.
237. $a + b, a - b, \alpha$.
238. $a + b, a - b, \alpha + \beta$.

Aufgaben über praktische Anwendung der Congruenz der Dreiecke mit Hülfe der Meßkette, des Winkelmessers und der Wasserwage.

239. Die Strecke AB ist nicht meßbar, weil sich zwischen A und B ein Sumpf, ein Hügel 2c. befindet. Dagegen sind CA und CB meßbar. Es soll die Länge von AB bestimmt werden.

240. Es soll die Höhe eines auf horizontaler Ebene stehenden zugänglichen Thurmes, eines beliebigen Gebäudes, eines Baumes bestimmt werden.

241. Es soll die Entfernung eines zugänglichen Punktes P von der Spitze S eines Thurmes, einer Säule 2c. bestimmt werden.

242. Es soll die Entfernung der Punkte A und B, die auf verschiedenen Seiten eines Flusses liegen, bestimmt werden.

243. Es soll die Höhe eines unzugänglichen Thurmes bestimmt werden, 1) wenn derselbe auf einer horizontalen Ebene steht, 2) wenn er nicht auf horizontaler Ebene steht.

244. Es soll die Differenz der Höhen einer Bergesspitze und eines gegebenen Punktes bestimmt werden.

Drittes Kapitel.

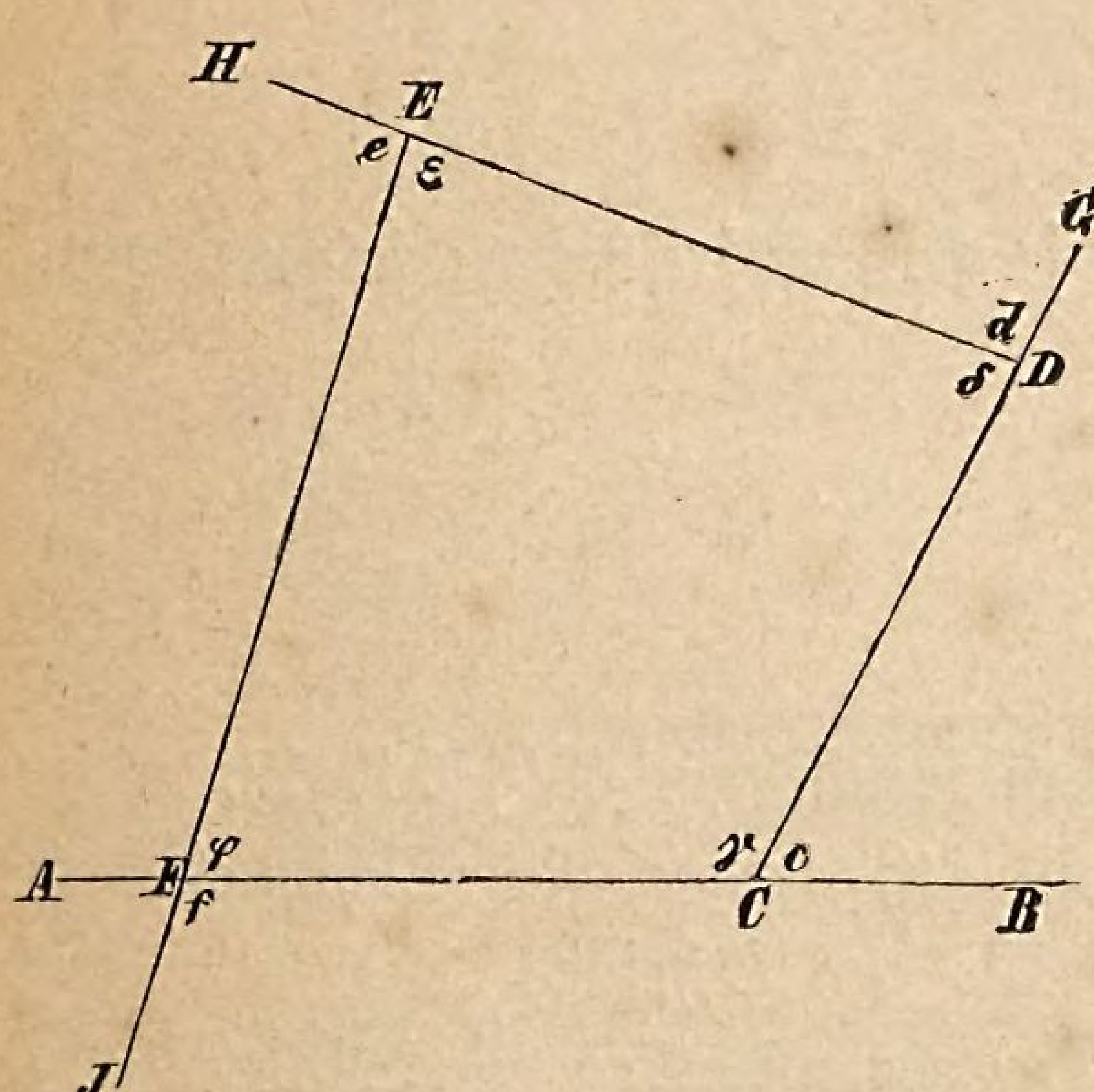
Beziehungen von vier geraden Linien, welche sich schneiden.

Das Viereck.

§ 30.

Wenn bei der vollen Umdrehung einer Geraden in einer Ebene vier Drehpunkte auftreten, so entsteht eine Figur, welche von vier geraden Linien begrenzt ist: das ebene Viereck.

Fig. 57.



Wenn (Fig. 57) AB sich um C dreht bis in die Lage CG, dann um D bis in die Lage DH, dann um E bis in die Lage EJ, welche AB in F schneidet, dann um F bis in die ursprüngliche Lage AB, so ist eine vollständige Umdrehung vollendet. Es ist daher

$$c + d + e + f = 4\,R \ (\S\ 17).$$

Die vier Außenwinkel c, d, e, f des Vierecks CDEF bilden aber mit den vier Innenwinkeln γ, δ, ε, φ vier Paare Nebenwinkel, also 8 R; mithin

$$\gamma + \delta + \varepsilon + \varphi = 4\,R \ (\S\ 17, 1 \text{ u. } 2).$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

Die Winkel eines Vierecks betragen zusammen 4 R.

Dieser Lehrsatz ist in § 17, 2 enthalten und ergibt sich, wenn wir n = 4 setzen.

In Beziehung auf die Richtungen der Seiten eines Vierecks sind drei Fälle möglich:

1) Das Viereck hat zwei Paare paralleler Seiten: das Parallelogramm; 2) das Viereck hat ein Paar paralleler Seiten: das Trapez; 3) das Viereck hat keine parallele Seiten: das Trapezoid.

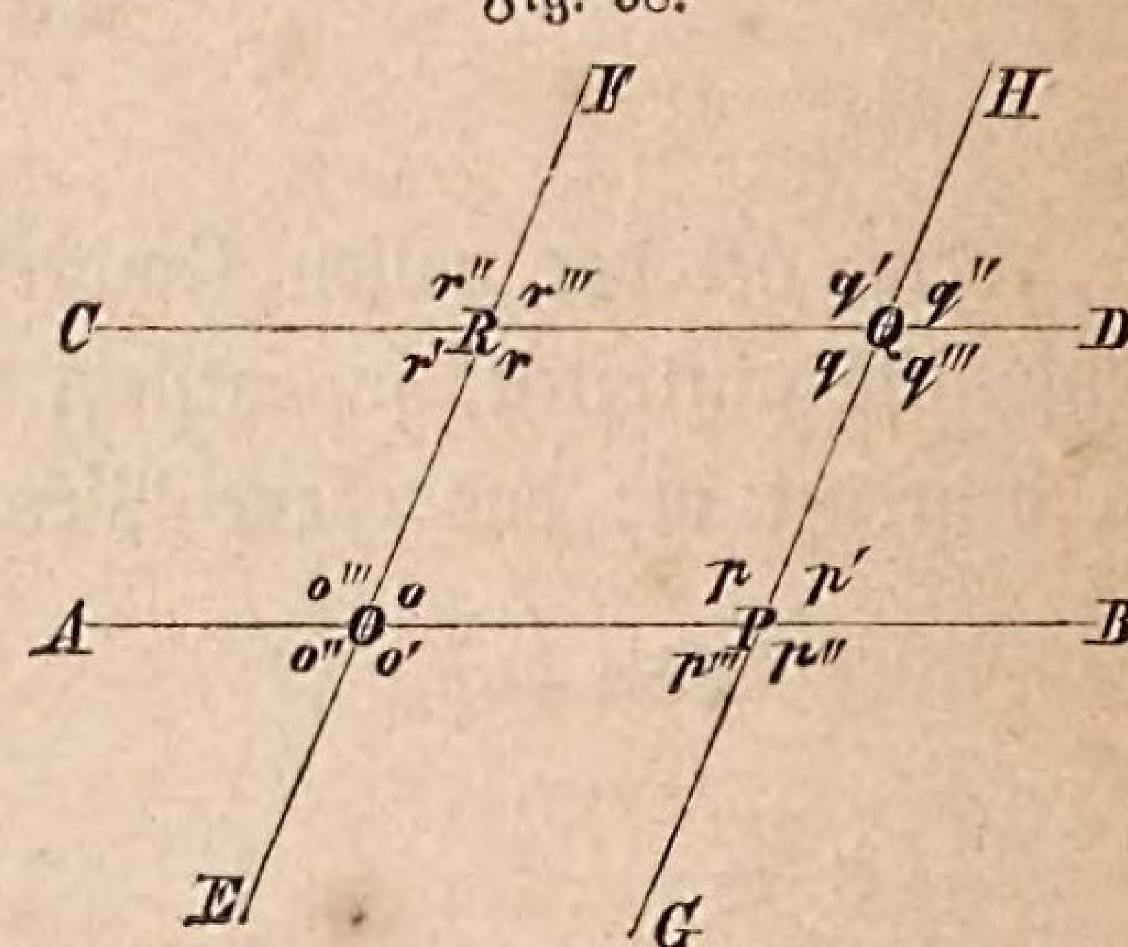
Das Parallelogramm.

§ 31.

Unter einem Parallelogramme versteht man ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Wenn also (Fig. 58) OP ⫲ RQ und OR ⫲ PQ ist, so ist Viereck OPQR ein Parallelogramm. Untersuchen wir die Beziehungen der Winkel eines Parallelogramms.

Fig. 58.



Da bei den Winkeln o und r
Richtung OP ⫲ RQ,
" OR Ƶ RO,

so ist o + r = 2 R (als gem. Parallelwinkel) § 11, 3.

Vergleiche die Richtungen der Schenkel von r und q, q und p, p und o. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Im Parallelogramme betragen je zwei auf einander folgende Winkel 2 R.

Bei den Winkeln o und q ist
Richtung OP Ƶ QR,
OR Ƶ QP.

o = q als Antiparallelwinkel (§ 11, 2).

Vergleiche o und q mit p′, mit q″, ferner die Richtungen der Schenkel von r und p. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Im Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Vergleiche die übrigen Winkel der Fig. 57 mit einander, vorzugsweise bezüglich der Richtungen ihrer Schenkel.

Aus den beiden vorhergehenden Lehrsätzen ergibt sich, daß alle Winkel eines Parallelogramms bestimmt sind, wenn ein Winkel desselben gegeben ist.

Wie verhält es sich mit den Winkeln eines Parallelogramms, wenn ein Winkel desselben als Rechter bekannt ist?

Wie verhält es sich mit den Winkeln eines Vierecks, wenn dieselben gleich sind, und was für eine Figur ist das gleichwinklige Viereck?

Ein Parallelogramm, in welchem jeder Winkel ein Rechter ist, wird Rechteck genannt.

Da Parallelsein und Supplementarsein der zusammengehörigen Winkel gleichwerthig ist, so läßt sich Lehrs. 1 umkehren. Sind in (Fig. 58) $o + r = 2\,R$, so ist $OP \# RQ$ (§ 15, 3), und wenn $r + q = 2\,R$, so ist $RO \# QP$; also ▱OPQR ein Parallelogramm. Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Wenn in einem Vierecke je zwei auf einander folgende Winkel supplementar sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Wenn Fig. 58

$$\begin{array}{c} o = q, \\ p = r, \\ \hline \end{array}$$

so ist $o + p = r + q = \frac{1}{2}(o + p + q + r) = \frac{1}{2} \cdot 4\,R = 2\,R.$

Aber auch

$$\begin{array}{c} o = q, \\ r = p. \\ \hline o + r = q + p = 2\,R. \end{array}$$

Sind aber in einem Vierecke je zwei auf einander folgende Winkel supplementar, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Es läßt sich also auch 2 umkehren, und wir erhalten den Lehrsatz:

4. Wenn in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

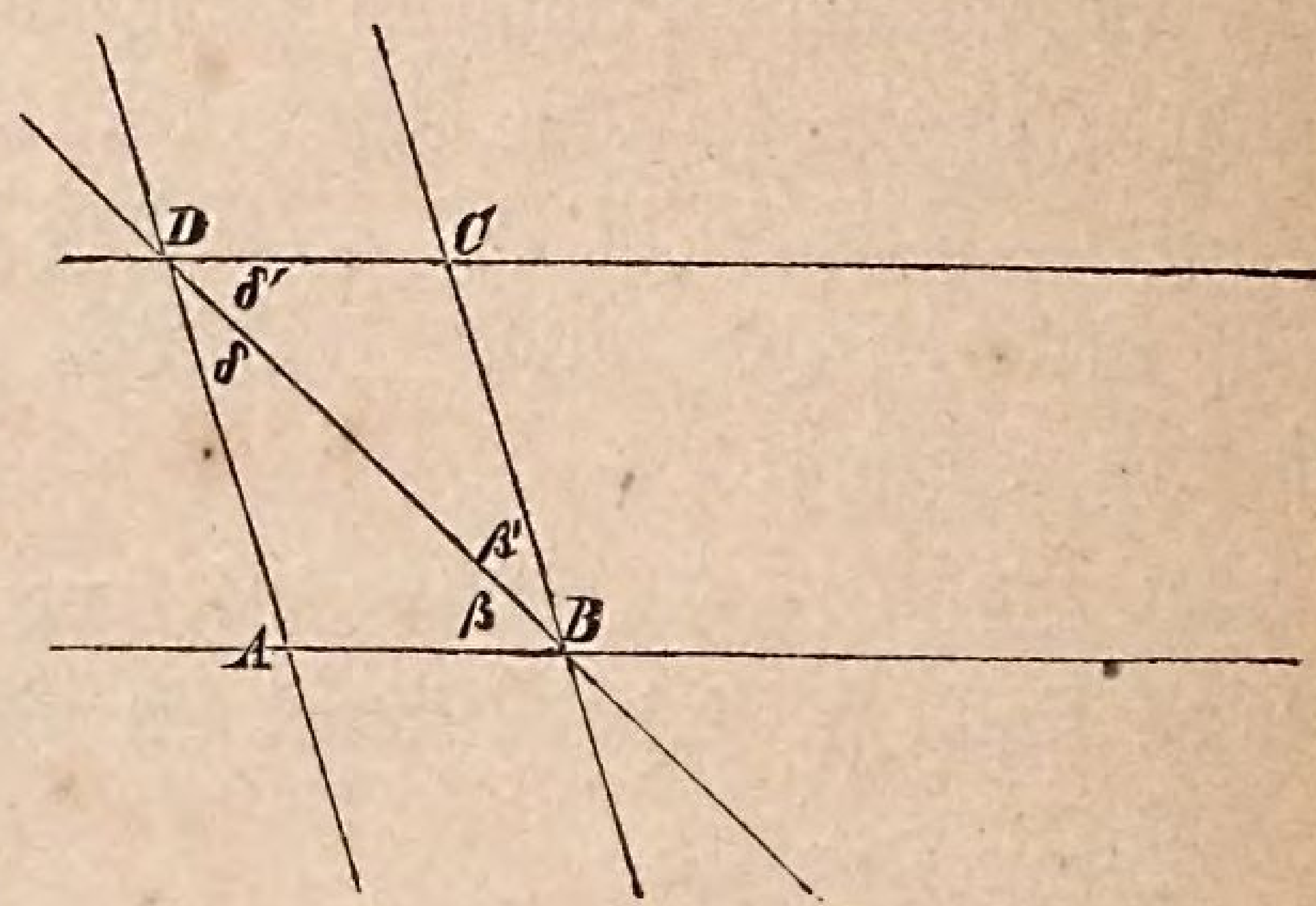
§ 32.

In einem Vierecke ist jede Ecke mit den Nachbarecken, nicht aber mit der gegenüberliegenden Ecke durch Geraden in unmittelbare Beziehung gesetzt. Die Geraden, welche nicht auf einander folgende Ecken eines Vielecks verbinden, heißen Diagonalen. Da in einem Vierecke jede Ecke nur eine gegenüberliegende Ecke hat, so läßt sich von jeder Ecke nur eine Diagonale ziehen. Es gibt also vier Diagonalrichtungen, aber nur zwei Diagonalen, da Richtung AC und Richtung CA derselben Geraden zukommen.

Zieht man in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 59) die Diagonale BD,

so ist DB $\angle$ BD, ebenso DC $\angle$ CD, aber auch DC $\angle$ BA, DA $\angle$ BC 2c. Es bildet daher BD mit den Seiten von ABCD Parallelwinkel, Antiparallelwinkel und gemischte Parallelwinkel. So sind δ und β', δ' und β Antiparallelwinkel. Mithin $\delta' = \beta$, und $\delta = \beta'$.

Fig. 59.



Vergleichen wir nun die beiden Dreiecke ABD und CDB, in welche das Parallelogramm durch die Diagonale BD getheilt wird, so stimmen dieselben in der Seite BD und den beiden anliegenden Winkeln überein, sind also congruent. Wir erhalten also den Lehrsatz:

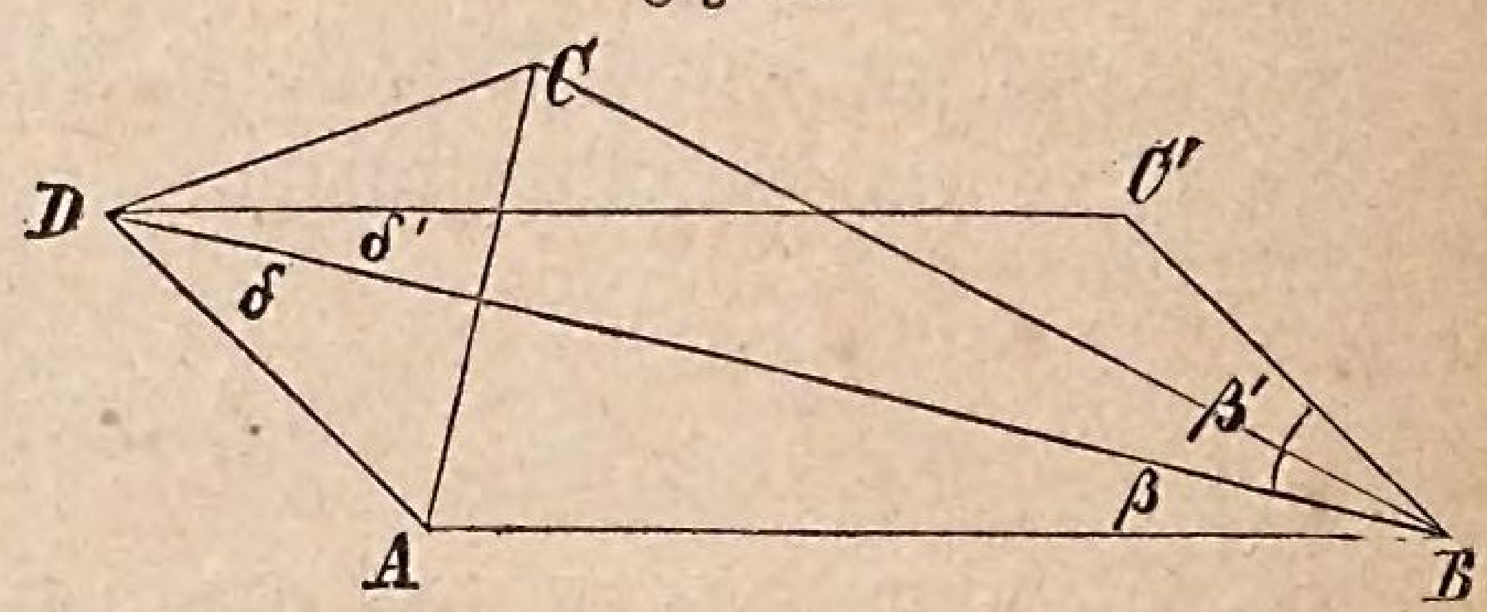
1. Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

In den congruenten Dreiecken ABD und CDB entspricht Punkt C dem Punkte A, Punkt D des einen Punkt B des anderen. Da $\delta = \beta'$, so ist die δ gegenüberliegende Seite AB gleich der β' gegenüberliegenden DC, und da $\delta' = \beta$, so ist BC = AD. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich.

Zwei congruente Dreiecke lassen sich in zweifacher Weise an einander legen. Dreht man (Fig. 60) $\triangle$ ABD um BD bis in die Lage CDB, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ CBD, und es entspricht also BD des einen Dreiecks BD des anderen. Legt man aber das Dreieck noch einmal an BD an, aber es umkehrend, so daß BD nicht BD, sondern DB deckt, so erhält es die Lage C'DB, und in dieser Lage bildet es mit dem ursprünglichen Dreieck ABD das Parallelogramm ABC'D, während das Viereck ABCD Deltoid genannt wird.

Fig. 60.



Das Deltoid ist also ein Trapezoid, welches zwei Paare gleicher Seiten hat. Wie verhält es sich (Fig. 60) mit den gegenüberliegenden Winkeln des Deltoids? Was für Beziehungen bestehen zwischen einzelnen Winkeln des Deltoids, welche die Diagonalen mit den Seiten bilden? Welche Winkel bilden die Diagonalen des Deltoids mit einander, und wie schneiden sie sich?

Es ist also nicht gleichwerthig, ob ein Viereck ein Parallelogramm ist, oder ob es durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt wird.

Lehrsatz 1 läßt sich also nicht umkehren. Wenn dagegen ein Viereck ABC'D durch die Diagonale BD in zwei congruente Dreiecke getheilt wird, und Ecke B des einen der Ecke D des anderen entspricht, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn in dem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind. Ist nämlich (Fig. 60)

$$\begin{array}{l} AD = BC', \\ AB = DC', \text{ so ist, da} \\ BD = BD, \\ \hline \triangle ABD \cong C'DB. \end{array}$$

Da aber auch AB = DC', so ist $\delta = \beta'$, mithin AD $\#$ BC'; da ferner in denselben congruenten Dreiecken AD = BC', so ist $\beta = \delta'$; mithin AB $\#$ DC'. Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Jene Bedingung, wonach ein Viereck, welches durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt wird, nur dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei gegenüberliegende Ecken des Vierecks entsprechende Ecken der Dreiecke sind, wird auch erfüllt, wenn zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks gleich und parallel sind. Ist (Fig. 60)

$$\begin{array}{l} AB = DC' \text{ und} \\ AB \# DC', \text{ so ist} \\ \beta = \delta' \text{ (als Antiparallelwinkel).} \end{array}$$

Da außerdem BD den Dreiecken ABD und C'DB gemeinschaftlich, so stimmen dieselben in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also congruent. Mithin liegen den gleichen Winkeln β und δ' gleiche Seiten gegenüber. Es ist also AD = BC', und da außerdem n. V. AB = DC', so ist nach 3 ABC'D ein Parallelogramm. Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. 33.

Zieht man in einem Parallelogramme die beiden Diagonalen, so entstehen vier Dreiecke, wovon jedes eine Parallelogrammsseite und von jeder Diagonalen einen Abschnitt zu Seiten hat.

Wenn (Fig. 61) AD ungleich DC, so sind je zwei auf einander folgende

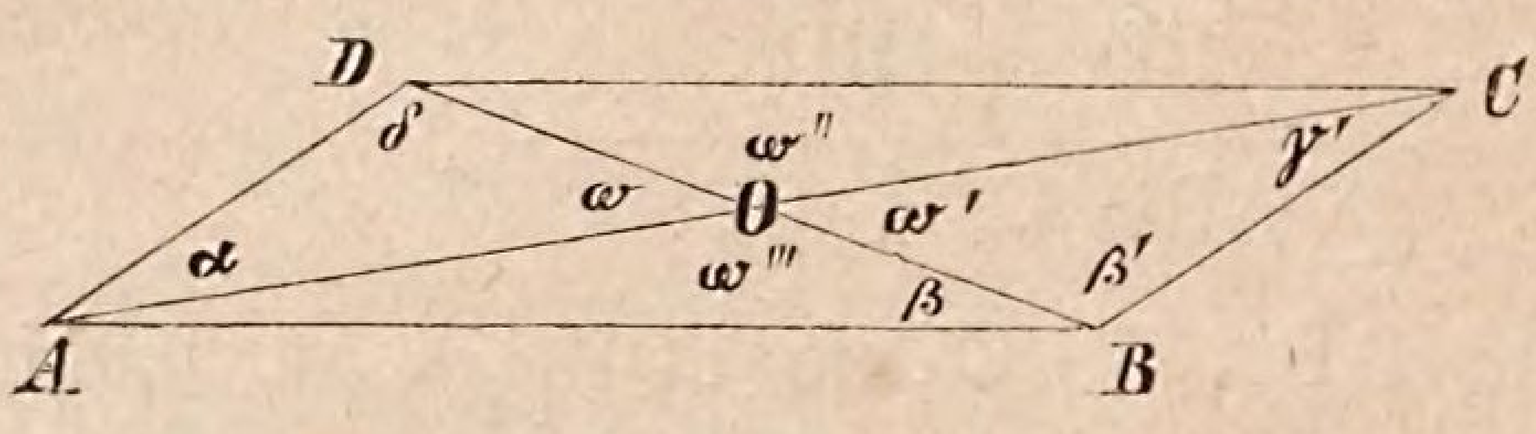
Dreiecke nicht congruent. Vergleichen wir aber zwei gegenüberliegende Dreiecke, z. B. $\triangle$ AOD und COB, so ist

AD = BC (als gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms),

$$\left.\begin{aligned}\delta &= \beta' \\ \alpha &= \gamma'\end{aligned}\right\}$$ als Antiparallelwinkel.

$\triangle$ AOD $\cong$ COB.

Fig. 61.



Da aber auch $\delta = \beta'$, so ist AO = OC, und da $\alpha = \gamma'$, so ist DO = OB. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. In einem Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

Aus Fig. 61 ergibt sich leicht, daß das gegenseitige Halbiren der Diagonalen das Congruentsein der gegenüberliegenden Dreiecke nach sich zieht, hieraus aber das Parallelsein der gegenüberliegenden Vierecksseiten folgt. Wenn nämlich (Fig. 61)

DO = OB,

AO = OC, so ist, da

$\omega = \omega'$ (als Scheitelwinkel),

$\triangle$ AOD $\cong$ COB. Mithin, da

AO = OC,

$\delta = \beta'$;

folglich AD $\#$ BC (§ 15, 2).

Außerdem folgt aus der Congruenz der beiden Dreiecke, daß AD = BC. Mithin ABCD ein Parallelogramm (§ 32, 4). Wir erhalten also den Lehrsatz:

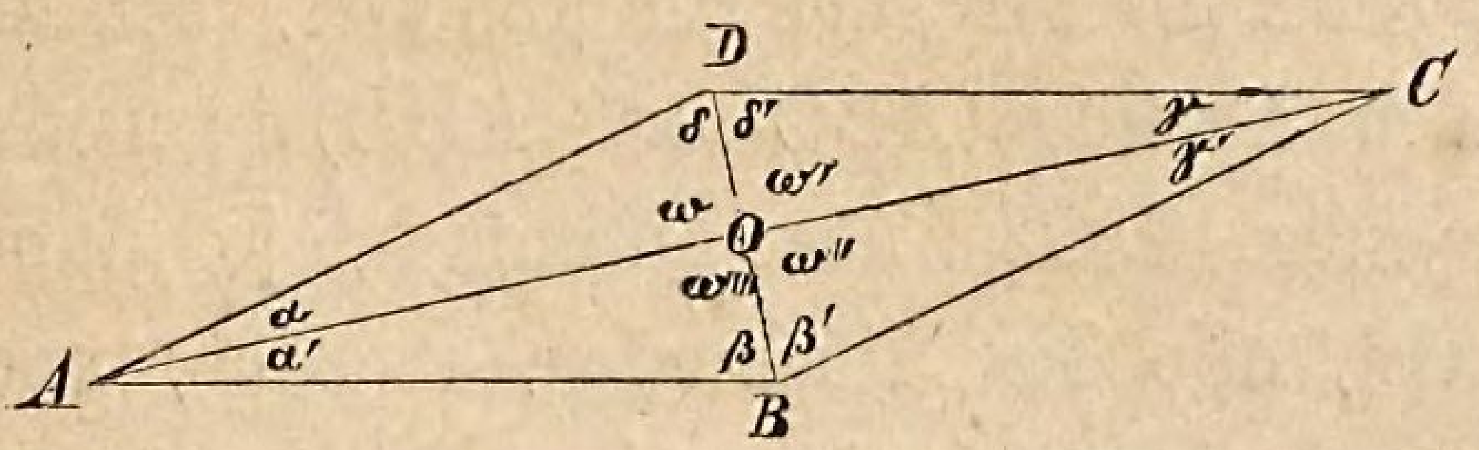
2. Wenn in einem Vierecke sich die Diagonalen gegenseitig halbiren, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Da in dem Parallelogramme (Fig. 61) sich die Diagonalen halbiren, so stimmen je zwei aufeinander folgende Dreiecke in zwei Seiten (AO = OC, OD = OD) überein. Mithin sind die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel (ω u. ω'') ungleich, wenn die aufeinanderfolgenden Parallelogrammsseiten ungleich sind, dagegen gleich, wenn diese gleich sind. Sind umgekehrt die von den Diagonalen des Parallelogramms gebildeten Winkel (ω, ω'') gleich, so sind auch die aufeinanderfolgenden Seiten des

Parallelogramms gleich, d. h. das Parallelogramm ist gleichseitig. Das gleichseitige Parallelogramm heißt Rhombus. Ein gleichseitiges Viereck ist auch nothwendig ein gleichseitiges Parallelogramm. Warum?

Ist also (Fig. 62) AB = BC = CD = DA, so haben wir

Fig. 62.



$$AO = OC \text{ (1.)},$$
$$OD = OD,$$
$$AD = DC \text{ (n. V.)}.$$

$\triangle AOD \cong COD$. Mithin, da

$$AD = DC,$$

$$\omega = \omega' = R.$$

Aus denselben Gründen ergibt sich:

$\triangle AOD \cong DOC \cong COB \cong BOA$. Aus dieser Congruenz folgt:

$$\omega = \omega' = \omega'' = \omega''' = R, \text{ und}$$
$$\delta = \delta', \gamma = \gamma', \beta = \beta', \alpha = \alpha'.$$

Wir erhalten also die Lehrsätze:

3. Der Rhombus wird durch die Diagonalen in vier congruente Dreiecke getheilt.

4. Im Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht.

5. Die Winkel des Rhombus werden durch die Diagonalen halbirt.

Wenn (Fig. 62) die Diagonalen eines Parallelogramms auf einander senkrecht stehen, so ergibt sich die Congruenz der vier Dreiecke und daraus die Gleichseitigkeit des Parallelogramms. Ist nämlich ABCD ein Parallelogramm und $\omega = R$, so ist

$$AO = OC,$$
$$OD = OD,$$
$$\omega = \omega' \text{ (als Rechte)}.$$

$\triangle AOD \cong DOC$, folglich $AD = DC$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

6. Wenn in einem Parallelogramme die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, so ist dasselbe ein Rhombus.

Untersuchen wir das Größenverhältniß der Diagonalen eines Parallelogramms. In einem solchen sind (Fig. 61) die Diagonalen Seiten von zwei Dreiecken, die auf derselben Parallelogrammsseite stehen, z. B. in den Dreiecken ABC und ABD, und zwar die Gegenseiten zweier aufeinanderfolgenden Parallelogrammswinkel. Da diese Winkel (§ 31, 1) supplementar sind, so ist im Allgemeinen der eine ein stumpfer, der andere ein spitzer. Weil aber die beiden Dreiecke (ABC und ABD) in den zwei die Supplementwinkel einschließenden Seiten übereinstimmen, so sind die Gegenseiten der ungleichen Winkel, also die Diagonalen, ungleich, und zwar liegt dem stumpfen Parallelogrammswinkel die größere Diagonale gegenüber. Wenn dagegen die aufeinanderfolgenden Winkel eines Parallelogramms gleich sind, so sind die beiden Dreiecke congruent und mithin die Diagonalen gleich.

Ist (Fig. 63) in dem Parallelogramme ABCD

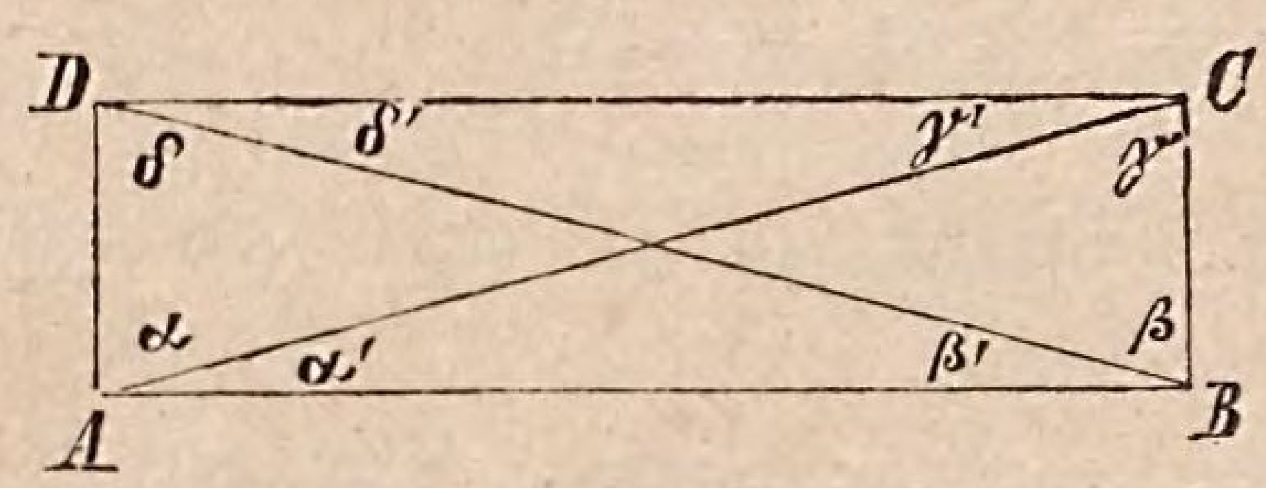
$\sphericalangle$ DAB = CBA = R, so ist, da
AD = BC,
AB = AB,

$\triangle$ ABD $\cong$ ABC;

mithin ist, da $\sphericalangle$ DAB = CBA, BD = AC.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

Fig. 63.



7. In einem Rechtecke sind die Diagonalen einander gleich.

Wenn umgekehrt in einem Parallelogramme (ABCD, Fig. 63) die Diagonalen (AC und BD) einander gleich sind, so ergibt sich die Congruenz der auf derselben Parallelogrammsseite stehenden Dreiecke ($\triangle$ ABD und ABC) und hieraus das Gleichsein zweier aufeinanderfolgenden Parallelogrammswinkel (bei A und B), woraus dann folgt, daß diese Winkel Rechte sind. Ist nämlich ABCD (Fig. 63) ein Parallelogramm, und

AC = BD, so ist, da
BC = AD, und
AB = AB,

$\triangle$ ABC $\cong$ ABD; mithin, da
AC = BD n. V.,

$\sphericalangle$ CBA = DAB; folglich, da sie als aufeinanderfolgende Winkel eines Parallelogramms supplementar sind,

$\sphericalangle$ CBA = DAB = R.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

8. Wenn in einem Parallelogramme die Diagonalen einander gleich sind, so ist dasselbe ein Rechteck.

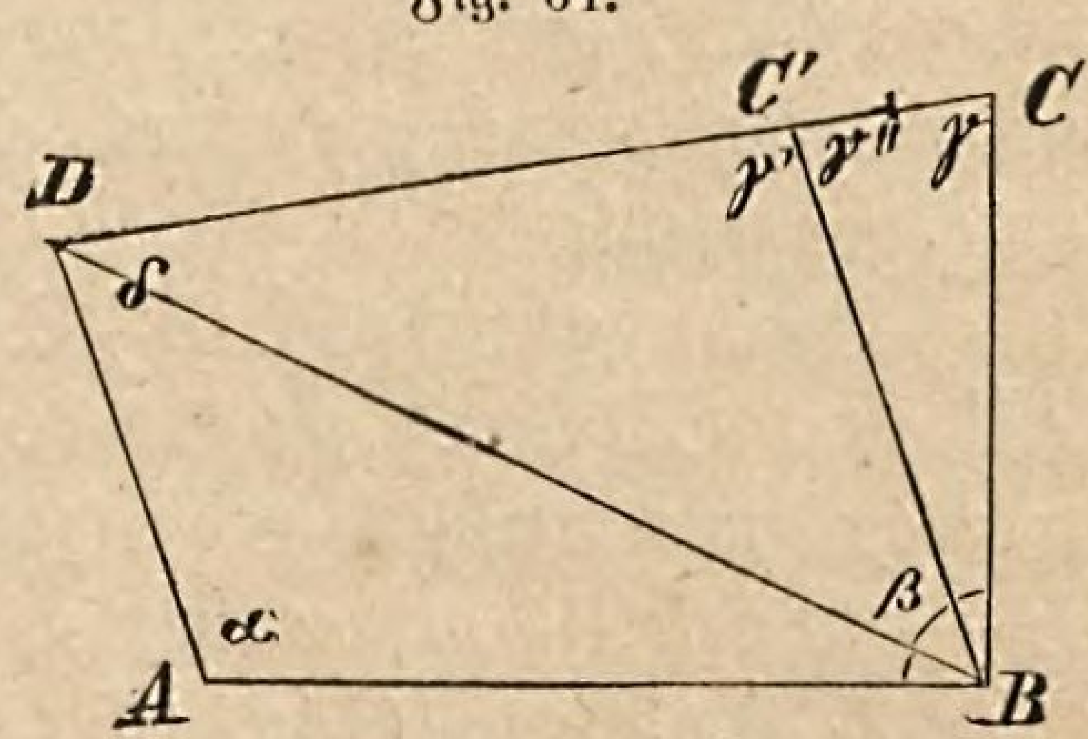
Wie verhält es sich (Fig. 63) mit den Winkeln α, δ, β, γ, und wie mit α', β', γ', δ'? — Im Allgemeinen werden die aufeinanderfolgenden Seiten des Rechtecks von verschiedener Größe sein. Alsdann sind auch die Winkel beim Durchschnittspunkte der Diagonalen ungleich. In einem besonderen Falle sind die aufeinanderfolgenden Seiten gleich, oder das gleichwinklige Viereck kann auch gleichseitig sein. Ein Parallelogramm mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln heißt regelmäßiges Viereck oder Quadrat. Dasselbe ist also Rechteck und Rhombus zugleich. Welche Lehrsätze gelten mithin vom Quadrate?

Congruenz der Vierecke.

§ 34.

Während das Dreieck sechs, hat das Viereck acht Hauptstücke: vier Seiten und vier Winkel. Da aber zwischen diesen Stücken eine gegenseitige Abhängigkeit besteht, so sind zur Bestimmung eines Vierecks nicht acht Stücke erforderlich. Wie viele aber nöthig sind, wollen wir jetzt untersuchen. Zunächst muß eine Seite AB (Fig. 64) gegeben sein, dann ein anliegender Winkel α und der zweite Schenkel AD dieses Winkels. Hiermit sind drei Ecken des Vierecks bestimmt, und es ist also noch die vierte Ecke zu bestimmen. Diese ist aber bestimmt, wenn 1) δ und β, 2) δ und DC, 3) β und BC gegeben sind. Sind dagegen zu AB, AD und α noch δ und BC gegeben, so erhalte ich, wenn ich mit BC um B einen Kreis beschreibe, im Allgemeinen zwei Vierecke ABCD und ABC′D, welche die Seiten AB, AD, BC und die Winkel α und δ der Größe nach enthalten. Von den Winkeln γ und γ' ist aber der eine spitz, der andere stumpf, da $\gamma = \gamma''$, also beide spitz, aber $\gamma' + \gamma'' = R$, also γ' stumpf als Nebenwinkel eines spitzen Winkels.

Fig. 64.



Ist keiner von den Winkeln δ und β gegeben, sondern statt derselben zwei weitere Seiten, so kann ich mit diesen um D und B Kreise beschreiben. Schneiden sich diese im Punkte C, so kann ich $\triangle$ DBC um DB umschlagen, und erhalte so auf der anderen Seite von DB einen zweiten Punkt C″, der von D und B dieselben Entfernungen hat wie C. Allein

nun enthält das Viereck ABC''D entweder den Winkel α nicht, oder der Winkel bei C'' ist überstumpf, während wir nur Vielecke mit hohlen Winkeln oder mit ausspringenden Ecken betrachten. Auf derselben Seite von BD aber können sich die Kreise nur in einem Punkte schneiden (§ 25 d).

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in zwei anstoßenden Seiten und drei Winkeln von gleicher Lage.

2. Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in drei Seiten und den beiden eingeschlossenen Winkeln von gleicher Lage.

3. Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in drei Seiten, einem eingeschlossenen und einem nicht eingeschlossenen Winkel von gleicher Lage, die beiden anderen nicht eingeschlossenen Winkel aber gleichartig sind.

4. Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in allen vier Seiten und einem Winkel der Größe und gegenseitigen Lage nach übereinstimmen.

Aus 1 ergibt sich:

5. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn sie in zwei anstoßenden Seiten und einem Winkel übereinstimmen.

Aus 5 folgt:

6. Zwei Rechtecke sind congruent, wenn sie in zwei anstoßenden Seiten übereinstimmen.

Aus 6 folgt:

7. Zwei Quadrate sind congruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.

Aus 5 folgt:

8. Zwei Rhomben sind congruent, wenn sie in einer Seite und einem Winkel übereinstimmen.

Aufgaben.

§ 35.

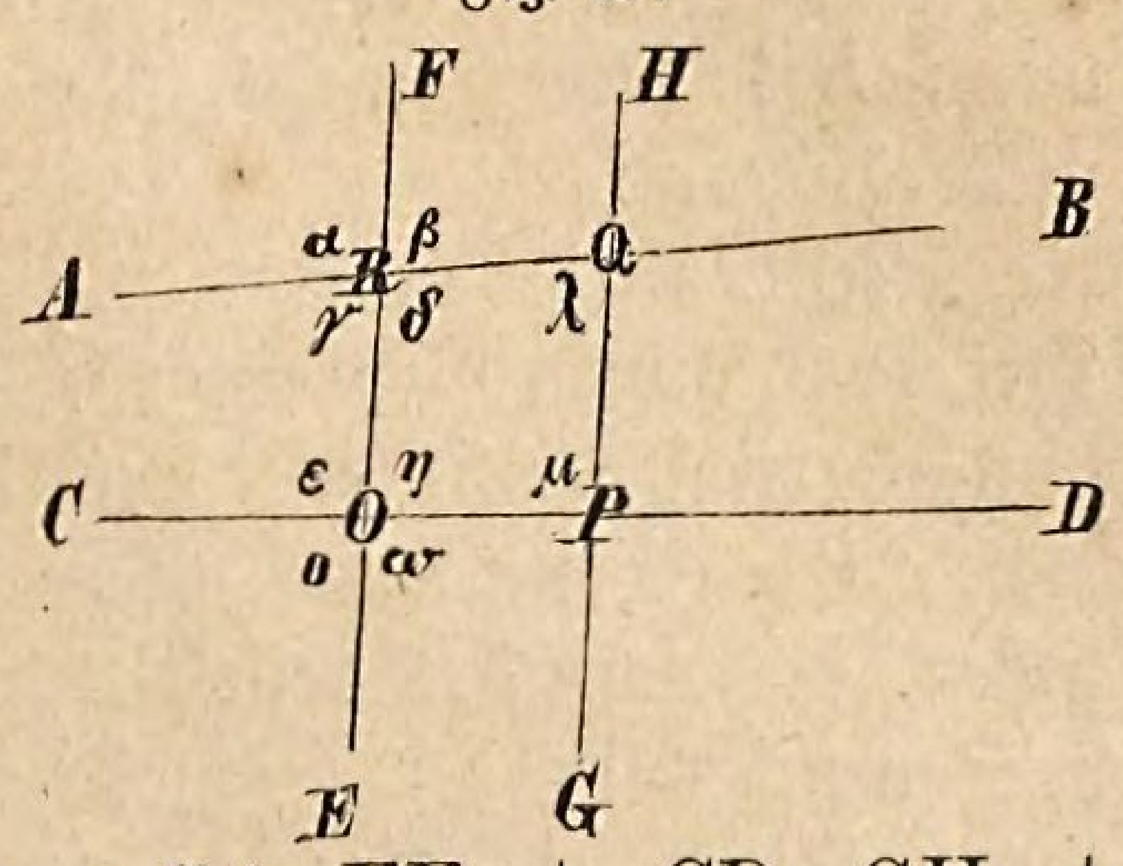
245. Zwei Strecken, die hinlänglich verlängert sich schneiden, convergiren nach der Seite ihres Durchschnittspunktes und divergiren nach der entgegengesetzten.

Wenn daher (Fig. 65) BA und DC nach links convergiren, so divergiren AB und CD nach rechts. Wenn nun AB und CD von EF geschnitten werden, wie verhält es sich dann mit der Größe von $\gamma + \varepsilon$, $\delta + \eta$, $\alpha + o$, $\beta + \omega$, α und ε, β und η, γ und o, δ und ω?

246. Wenn (Fig. 65) GH $\nparallel$ EF, und BA und DC convergiren, wie verhält es sich mit $\eta + \delta$, $\lambda + \mu$?

247. Wenn man (Fig. 65) durch den Scheitel von α eine Parallele zu CD zieht, fällt dieselbe in den Winkel δ oder β?

Fig. 65.



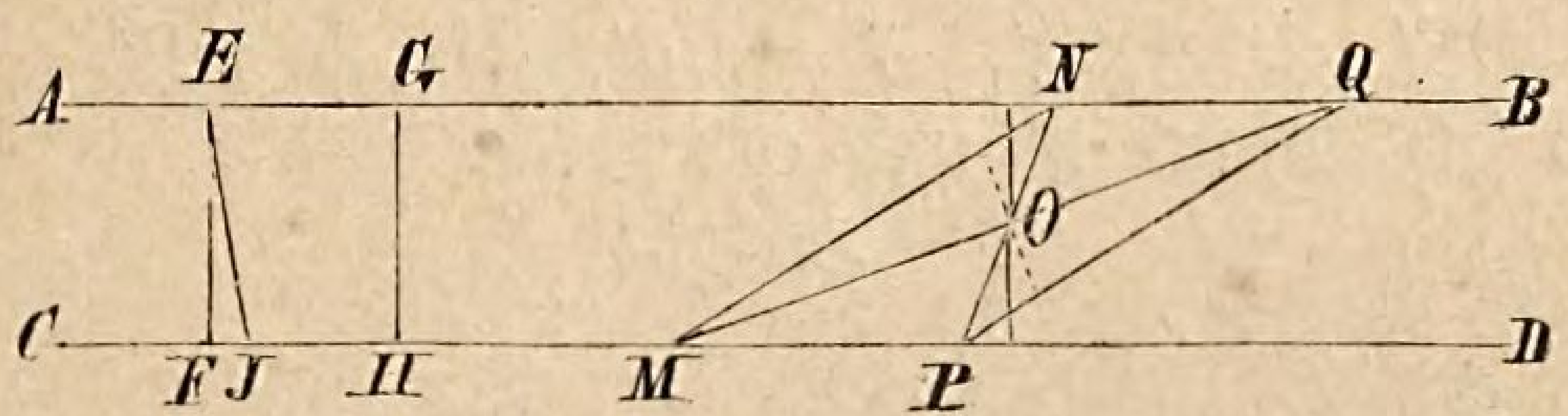
248. Wenn (Fig. 65) BA und DC convergiren, wie verhält es sich dann mit dem Größenverhältniß von PQ und OR?

249. Welche Lehrsätze lassen sich nach den vorhergehenden Aufgaben über das Trapez aufstellen?

250. Wenn (Fig. 66) AB und CD parallel, EF ⊥ CD, GH ⊥ CD, wie verhält es sich dann a) mit EF und GH der Richtung und Größe nach, b) mit EF und EJ der Größe nach?

(Die Senkrechte EF nennt man die Entfernung, den Abstand des Punktes E von der Linie AB).

Fig. 66.



251. Wenn man (Fig. 66) im Parallelogramm MPQN vom Durchschnittspunkte O der Diagonalen Senkrechte auf die Parallelen fällt, wie werden diese Senkrechten in O getheilt?

252. Wie viele verschieden große Höhen (Entfernungen einer Ecke von einer gegenüberliegenden Seite) hat das Parallelogramm?

253. Wie viele Höhen hat der Rhombus?

254. Gegeben ist die Gerade AB und die Strecke e. 1) Oberhalb von AB, 2) unterhalb von AB mehrere Punkte zu suchen, welche von AB die Entfernung e haben. Was ist der Fall, wenn man die Punkte mit einander durch Geraden verbindet?

255. Mehrere Punkte zu suchen, welche von zwei Parallelen dieselbe Entfernung haben.

256. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von einer Geraden eine gegebene Entfernung hat?

257. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von zwei Parallelen gleiche Entfernungen hat?

258. Den Punkt, in welchem der von dem leuchtenden Punkte C (Fig. 54) ausgehende Lichtstrahl die Gerade AB trifft, nennen wir Reflexionspunkt. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in welchem die reflektirten Lichtwellen vom Reflexionspunkte dieselbe Entfernung haben, wie der leuchtende Punkt C?

259. Die Strecke CE ist parallel AB. Man suche den Punkt D auf AB, in welchem ein von C ausgehender Lichtstrahl nach E hin reflektirt wird, und die Lage des Bildes von C (siehe Aufg. 74). 1) Welches ist

der geometrische Ort des Reflexionspunktes D und 2) des Bildes von C, wenn AB sich parallel mit sich selbst bewegt, C und E aber ihre Lage nicht ändern?

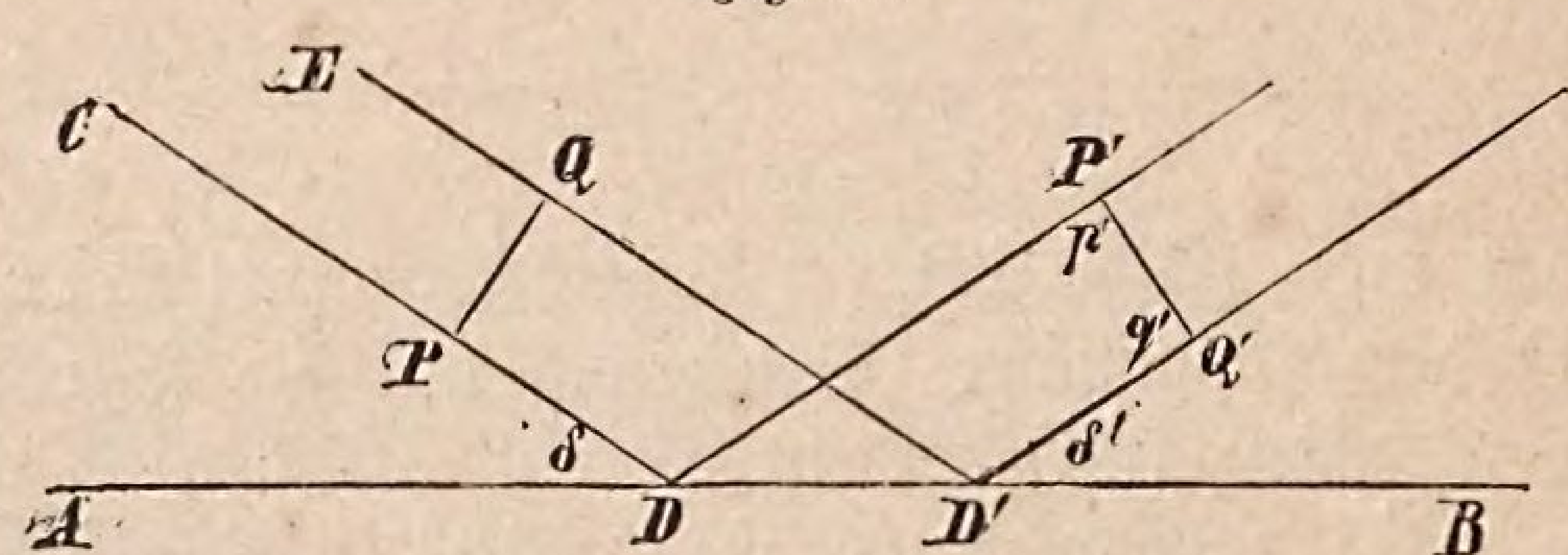
260. Gegeben sind zwei Geraden AB und CD. Den geometrischen Ort des Punktes zu finden, dessen gerade auf AB senkrecht stehende Verbindungslinien mit den Punkten von CD von AB halbirt werden.

261. Wenn von allen Punkten der Strecke CD Lichtstrahlen ausgehen, die von AB reflektirt werden, welches ist dann das Bild von CD, oder welches ist der geometrische Ort des Punktes, in welchem alle reflektirten Strahlen, die von einem Punkte von CD ausgehen, rückwärts verlängert sich schneiden?

262. Es sind drei Punkte A, B, C gegeben. Durch B eine Gerade so zu ziehen, daß BA und BC gegen dieselbe gleich geneigt sind, und eine Lichtwelle oder ein elastischer Körper, der von A sich geradlinig nach B bewegt, in B von der Geraden nach C reflektirt wird (siehe Aufg. 74).

263. In Fig. 67 bedeutet CEPQ ein Lichtbündel. $CP \# EQ$, $PQ \perp CP$, $DP' \# D'Q'$, $\delta = \delta'$, $PD + DP' = QD' + D'Q'$. Wie groß sind die Winkel p' und q'?

Fig. 67.



264. Gegeben ist eine Gerade AB und außerhalb ein Punkt P. Durch P eine Gerade zu ziehen, welche AB unter dem Winkel α schneidet.

265. Gegeben sind zwei Parallelen. Zwischen dieselben eine Strecke von gegebener Größe zu ziehen.

266. Gegeben sind zwei Parallelen und ein Punkt. Durch den Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß 1) die Strecke zwischen den Parallelen eine gegebene Größe hat, 2) der Unterschied des äußeren und inneren Abschnitts oder, wenn der Punkt innerhalb der Parallelen liegt, der beiden inneren Abschnitte eine gegebene Größe ist.

267. Gegeben ist eine Gerade AB und außerhalb der Punkt P. 1) Eine Gerade zu ziehen, die AB unter dem Winkel α schneidet und von P die Entfernung e hat. 2) Eine Gerade so zu ziehen, daß die von P auf dieselbe gefällte Senkrechte gleich e ist, und der Fußpunkt dieser Senkrechten von AB die Entfernung e' hat.

268. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C derjenigen Dreiecke, welche eine der Größe und Lage nach gegebene Strecke AB zur Grundlinie und a) h_c zur Höhe, b) m_c zur Mittellinie haben?

269. Welches ist der geometrische Ort der Gegenseite der Grundlinie eines Parallelogramms, welches eine der Lage und Größe nach gegebene Strecke AB zur Grundlinie und h_c zur Höhe hat?

270. Welches ist der geometrische Ort der dritten Ecke eines Parallelogramms, welches eine der Lage und Größe nach gegebene Strecke AB zur Grundlinie und d zur Diagonale hat?

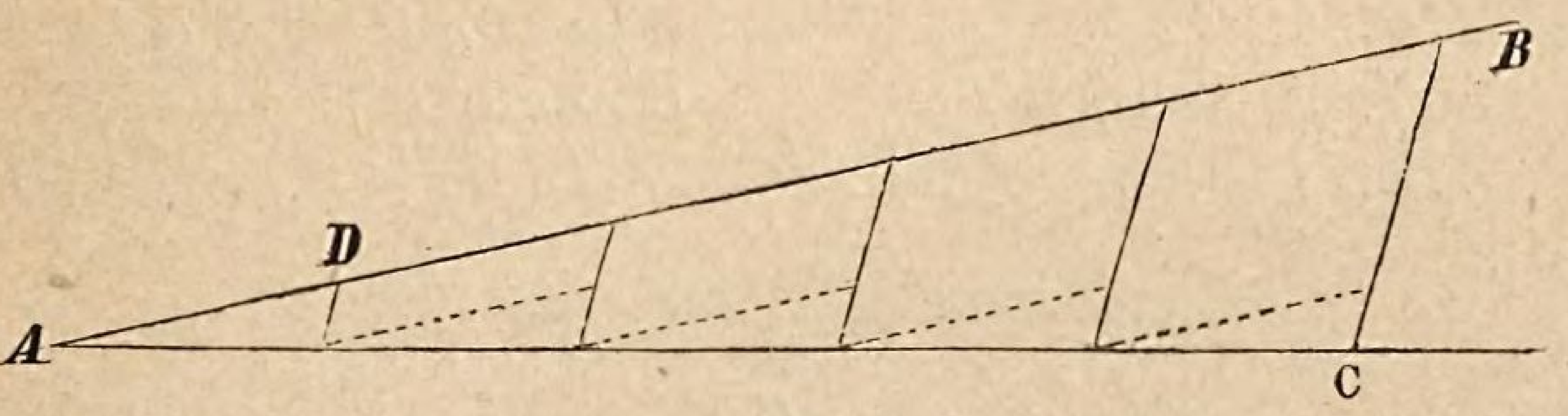
271. Welches ist der geometrische Ort des Diagonalpunktes (Durchschnittspunktes der Diagonalen) der Rechtecke, die eine der Lage und Größe nach gegebene Strecke AB zur Grundlinie haben.

272. Welches ist der geometrische Ort des Diagonalpunktes der Parallelogramme, die eine der Lage und Größe nach gegebene Strecke AB zur Grundlinie und 1) d zur Diagonale, 2) h zur entsprechenden Höhe, 3) m zur entsprechenden Mittellinie haben?

273. Auf dem Schenkel AB des Winkels BAC (Fig. 68) sei die Strecke AD 5mal, n mal aufgetragen. Durch die Theilpunkte ziehe man Parallelen zu der geraden Verbindungslinie des nten Theilpunktes mit dem Punkte C. Wie wird AC getheilt?

274. Eine gegebene Strecke in n gleiche Theile zu theilen.

Fig. 68.



Von einem rechtwinkligen Dreiecke sind gegeben:

275. a, h_a (siehe Aufg. 129 u. 130). 276. a, ${}^bP_a$ (siehe S. 83).

Von einem Dreiecke sind gegeben:

277. a, h_a, β.
278. a, h_a, m_a.
279. a, h_b, m_c.
280. a, h_a, m_b.
281. a, h_a, ${}^bP_a$.
282. a, m_a, ${}^bP_a$.
283. a, ${}^bP_a$, β.
284. a, ${}^bP_a$, $\sphericalangle b h_a$ (Winkel zw. b und h_a).
285. a, ${}^bP_a$, $\sphericalangle c h_a$.
286. h_b, h_c, α.
287. h_b, h_c, $\beta + \gamma$.
288. h_a, m_c, β.
289. h_a, m_a, β.
290. h_a, m_b, β.
291. h_a, m_a, $\alpha + \gamma$.
292. $a + b$, h_a, γ.
293. $a + b$, h_a, β.
294. $a + b$, h_a, $\alpha + \beta$.
295. $a + b$, h_a, $\alpha + \gamma$.
296. $a - b$, h_a, γ.
297. $a - b$, h_a, $\alpha + \beta$.
298. $a + b$, h_a, ${}^cP_a$.
299. $a - b$, h_a, ${}^cP_a$.

In dem Vierecke ABCD werden die Seiten AB, BC, CD, DA mit a, b, c, d, die Winkel bei A, B, C, D mit α, β, γ, δ, die Diagonalen AC und BD mit d'' und d', und die Winkel zwischen zwei Linien durch die einschließenden Linien bezeichnet; z. B. $\sphericalangle$ ad'' bedeutet den Winkel zwischen a und d''.

Von einem Quadrate sind gegeben:

300. a; 301. d''; 302. a + d''; 303. 2a + d''; 304. d'' − a; 305. 2a − d''.

306. Was für ein Viereck entsteht, wenn man von den Seiten a, b, c, d eines Parallelogramms von A, B, C, D aus gleiche Stücke ab-

schneidet und die auf einander folgenden Theilpunkte durch gerade Linien verbindet?

307. Was für ein Viereck entsteht, wenn man die Halbirungspunkte der vier Seiten 1) eines Quadrats, 2) eines Rechtecks, 3) eines Rhombus, 4) Rhomboids (eines gewöhnlichen Parallelogramms) durch gerade Linien verbindet?

Von einem Rechtecke sind gegeben:

308. a, b.
309. a, d'.
310. $a, \sphericalangle ad'$.
311. $a, \sphericalangle d'd''$.
312. $a, {}^aS_{d'}$ (Senkrechte von B auf d').
313. $a, {}^aP_{d'}$.
314. ${}^aP_{d'}, {}^aS_{d'}$.
315. $d', {}^aP_{d'}$ (siehe Aufg. 129 und 130. S. 85).
316. $d', {}^aP_{d'}$.
317. $a + b, d'$.
318. $a + b, \sphericalangle d'b$.
319. $a + b, \sphericalangle ad'$.
320. $a + b, \sphericalangle d'd''$.
321. $a - b, d'$.
322. $a - b, \sphericalangle bd'$.
323. $a - b, \sphericalangle ad'$.
324. $a - b, \sphericalangle d'd''$.
325. $a, b + d'$.
326. $a, d' - b$.
327. $b + d', \sphericalangle ad'$.

Von einem Rhombus sind gegeben:

328. a, α.
329. a, d'.
330. $a, \sphericalangle ad'$.
331. a, h.
332. $a, {}^aP_a$.
333. $a, {}^dP_a$.
334. $h, {}^dP_a$.
335. d', d''.
336. d', α.
337. d', β.
338. $d', \sphericalangle ad'$.
339. $d', \sphericalangle ad''$.
340. h, α.
341. h, d'.
342. $h, {}^aP_{d'}$.
343. $d', {}^dP_a$.
344. $a + d', \alpha$.
345. $d' - a, \alpha$.
346. $d' + 2a, \alpha$.
347. $d'' + 2a, d'$.
348. $d'' + d', \alpha$.
349. $d'' - d', \alpha$.
350. $d'' + d', a$.
351. $d'' - d', a$.

352. Gegeben ist eine Gerade AB und außerhalb der Punkt E. Einen Rhombus zu construiren, dessen eine Ecke in E, dessen eine Diagonale in AB liegt, und wovon außerdem gegeben sind 1) a; 2) α; 3) d'; 4) $d'' + d'$; 5) $d'' - d'$.

Von einem Parallelogramme sind gegeben:

353. a, b, β.
354. a, b, α.
355. a, b, d''.
356. a, b, h_a.
357. $a, b, \sphericalangle ad''$.
358. $a, b, {}^aS_{d''}$.
359. $a, b, {}^bP_a$.
360. $a, b, {}^{d''}P_a$.
361. $a, b, {}^aP_{d''}$.
362. $a, b, {}^aS_{d''}$.
363. a, d'', d'.
364. a, d'', h_a.
365. a, d'', h_b.
366. $a, d'', \sphericalangle d''d'$.
367. $a, d'', \sphericalangle ad''$,
368. $a, d'', \sphericalangle ad'$.
369. a, d'', β.
370. a, d'', α.
371. a, h_a, h_b.
372. $d'', d', \sphericalangle d''d'$.
373. d'', d', h_a.
374. d'', d', h_b.
375. $d'', h_a, \sphericalangle d''d'$.
376. d'', h_a, h_b.
377. d'', h_a, α.
378. d'', h_a, β.
379. $d'', h_a, {}^aS_{d''}$.

380. d'', h_a, $^aP_{d''}$.
381. $a + d'$, b, $\sphericalangle ad'$.
382. $a + d'$, b, α.
383. $a + d'$, b, β.
384. $a + \frac{d'}{2}$, d'', $\sphericalangle ad'$.
385. $a + \frac{d'}{2}$, $\sphericalangle d''d'$, $\sphericalangle ad$.
386. $a + b$, d'', β.
387. $a + b$, d'', α.
388. a, d', $^aS_{d''}$.
389. a, d', $^aP_{d''}$.
390. a, $d'' + d'$, $\sphericalangle d''d'$.
391. a, $d'' - d'$, $\sphericalangle ad''$.
392. a, $d'' - d'$, $\sphericalangle dd'$.
393. a, $d'' - d'$, $^aS_{d''}$.

Von einem Trapeze, in welchem a und c die Parallelseiten und h den Abstand derselben bedeutet, sind gegeben:

394. a, b, c, d''.
395. a, b, c, β.
396. a, b, c, α.
397. a, b, c, $\sphericalangle ad''$.
398. a, b, c, $\sphericalangle ad'$.
399. a, b, c, ^bP_a.
400. a, b, c, ^cP_b.
401. a, b, c, $^{d''}P_a$.
402. a, b, c, h.
403. a, b, h, d'.
404. a, b, d'', d'.
405. a, b, d'', ^cP_b.
406. a, b, d'', $^{d''}P_a$.
407. a, b, d'', ^cS_b.
408. a, b, d'', α.
409. a, b, h, α.
410. a, b, h, β.
411. a, b, d', β.
412. a, b, α, β.
413. a, b, α, γ.
414. a, b, γ, δ.
415. a, b, d'', $\sphericalangle d''d'$.
416. a, c, h, α.
417. a, c, h, γ.
418. a, c, h, d''.
419. a, c, d', $\sphericalangle ad''$.
420. a, c, α, β.
421. a, c, $\sphericalangle ad''$, $\sphericalangle ad'$,
422. a, c, α, $\sphericalangle ad''$.
423. a, h, d'', d'.
424. a, h, d'', α.
425. a, h, d'', γ.
426. a, h, d', γ.
427. a, d'', α, β.
428. a, h, α, β.
429. a, h, γ, δ.
430. a, d'', γ, δ.
431. a, d'', α, $\sphericalangle ad''$.
432. a, d'', α, $\sphericalangle ad'$.
433. a, d'', d', $^{d''}P_a$.
434. a, d'', d', $^{d''}P_a$.
435. b, d, δ, $\sphericalangle cd'$.
436. b, d, α, $\sphericalangle cd''$.
437. b, d, δ, $\sphericalangle bd''$.
438. $a + b$, c, h, d''.
439. $a + b$, c, h, $^{d''}P_a$.
440. $a + b$, c, h, ^dP_a.
441. $a + b$, d, h, $^{d''}P_a$.
442. $a + b$, d, h, $^{d'}P_a$.
443. $a + b$, c, d, d''.
444. $a + b$, d, h, d''.
445. $a - b$, c, d, d''.
446. $a - b$, c, d, h.
447. $a - b$, d, h, d''.
448. $a - b$, c, h, $^{d''}P_a$.
449. $a + b$, c, h, β.
450. $a + b$, c, h, γ.
451. $a + b$, h, d'', α.
452. $a + b$, c, d'', β.
453. $a + b$, c, d, α.
454. $a - b$, c, h, β.
455. $a - b$, c, h, γ.
456. $a - b$, h, d'', α.

Von einem Trapezoide sind gegeben:

457. a, b, d, α, β.
458. a, b, α, β, δ.
459. a, b, α, β, γ.
460. a, b, d'', d', α.
461. a, b, d', α. β.
462. a, b, c, d'', α.
463. a, b, c, d, α.
464. a, b, d, ^Dh_b, α.*)
465. a, b, d, $^Cm_{d'}$, α.**)
466. a, b, d, $^Ch_{d'}$, α.
467. a, b, d, ^Ch_d, α.
468. a, b, d, d'', ^Bh_d.
469. a, b, c, d, ^Bh_d.
470. a, b, c, d, ^Bm_d.
471. a, c, d, d'', ^Bm_d.
472. a, b, d, d'', ^aP_d.
473. a, b, c, d, ^dP_a.
474. a, d, d'', d' $\sphericalangle bd'$.
475. a, b, d, α, $\sphericalangle bd'$.
476. a, b, d, d'', $\sphericalangle cd''$.
477. a, b, d''. $^Dh_{d''}$, γ.
478. a, b, d, d'', α.
479. a, d, d'', α, $\sphericalangle d''d'$.
480. a, b, d, α, $\sphericalangle d''d'$.

*) ^Dh_b Senkrechte vom Punkte D auf die Seite b.
**) $^Cm_{d'}$ Verbindungslinie von C mit dem Halbirungspunkt von d'.

481. a, b, c, d'', ∢ d'd''.
482. a, b, d'', $^{D}h_{d''}$, ∢ d''d',
483. a + b, c, d, δ, ∢ ad''.
484. a + b, c, d, α, δ.
485. a + b, c, d, d'', ∢ ad''.
486. a + b, c, d'', α
487. a + b, c, d, δ, β.
488. a + b, c, d, δ, β + ∢ bd''.
489. a + b, a — b, c, d, δ.
490. a + b, c, d, d'', ∢ ad'' + ∢ bd''.
491. a + b, c, d, δ, ∢ ad'' — ∢ bd''.
492. a — b, c, d, δ, ∢ ad'' — ∢ bd''.
493. a + d', c, d, α, δ.
494. a + d', c, d, δ, ∢ ad''.
495. a — d', c, d, α, δ.
496. a — d', c, d, δ, ∢ ad''.

Viertes Kapitel.

Das geometrische Verhältniß und die geometrische Proportion.

§ 36.

Zu der Bestimmung der Größe eines mathematischen Gebildes ist eine Maßeinheit, eine bekannte Größe derselben Art, womit jene gemessen wird, erforderlich. Es entsteht daher zunächst die Aufgabe, anzugeben, wie oft eine Größe in einer anderen derselben Art enthalten ist, oder wie eine Größe aus einer anderen derselben Art entstanden gedacht werden kann auf dem Wege der Multiplication, wozu wir auch die Umkehrung derselben, die Division rechnen. Sehen wir uns daher die Multiplication etwas näher an. Eine Zahl mit einer anderen multiplizires heißt eine Zahl suchen, die so aus dem Multiplikand entsteht, wie der Multiplikator aus der Einheit. Während $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, ist $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$. Dieser Begriff der Multiplikation kann erst durch Erweiterung in der Geometrie Anwendung finden. Wie die Zahl aus der Einheit, so entsteht in gewissem Sinne die Linie aus dem Punkte. Wenn aber auch die Linie, obwohl sie durch die Bewegung des Punktes entsteht, doch nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, so kann man doch den Punkt als das Element der Linie ansehen und in jeder Lage, die er bei der Erzeugung der Linie durchläuft, festgehalten denken. Bewegt sich nun die Linie L aus sich heraus, so wird aus jeder Punktlage von L eine neue Linie L'. Wir dehnen nun den Begriff der Multiplikation dahin aus, daß L. L' das Produkt bedeutet, welches sich ergibt, wenn L sich so aus sich heraus bewegt, daß aus jeder Punktlage von L eine Linie L' wird. Nach S. 2 ist die Fläche das Ergebniß der Bewegung einer Linie aus sich heraus. Das Produkt L. L' ist also eine Fläche. Wird aus jeder Punktlage von L. L' durch Bewegung der Fläche aus sich heraus eine neue Linie L'', so ist nach dem Vorhergehenden das Ergebniß L. L'. L''. Dasselbe Er-

gebniß dieser Bewegung ist aber nach S. 2 ein Körper. Das Produkt L. L.′ L″ ist also ein Körper. Auf diese Weise können wir die Multiplikation mit anderen Linien fortsetzen, obwohl keine verstellbaren Gebilde entstehen, wenn die Anzahl der Faktoren drei übersteigt. Es ist nur die Entstehungsweise festzuhalten, die Bildungsweise muß häufig die Vorstellbarkeit des Endergebnisses ersetzen. — Aus dem Vorhergehenden ergibt sich folgende Definition der Multiplikation: Eine Größe a mit einer Größe b multiplizìren heißt eine Größe suchen, welche so aus a entsteht, wie b aus der Einheit (die Einheit ist bei Zahlgrößen die Eins, bei Raumgrößen der Punkt).

§ 37.

Die Beziehung einer Größe zu einer anderen heißt Verhältniß, und die Beziehung zweier Größen auf dem Wege der Division, d. i. der umgekehrten Multiplikation, heißt geometrisches Verhältniß. Erweitern wir den Begriff eines Quotienten entsprechend der obigen Erweiterung des Begriffs der Multiplikation, so daß Dividend und Divisor jede Größe sein können, so ist ein geometrisches Verhältniß ein Quotient, z. B. $\frac{a}{b}$.

Bei dem geometrischen Verhältniß $\frac{a}{b}$ heißt a Vorderglied, b Hinterglied. Ist $\frac{a}{b} = e$, so heißt e Exponent des geometrischen Verhältnisses. Multiplizire ich bei $\frac{a}{b}$ sowohl a wie b mit m, so wird der Werth oder Exponent des Verhältnisses durch die eine Multiplikation soviel mal größer, als er durch die andere kleiner wird. Der Werth bleibt also unverändert. Dasselbe findet bei der Division statt. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Ein geometrisches Verhältniß bleibt dasselbe, wenn Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplizirt oder durch dieselbe Zahl dividirt werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{m.\,a}{m.\,b} = \frac{a : m}{b : m}.$$

§ 38.

Eine Gleichung zwischen zwei geometrischen Verhältnissen heißt geometrische Proportion:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } a : b = c : d.$$

Die gewöhnliche Lesart ist: a verhält sich zu b wie c zu d, oder kurz: a zu b wie c zu d.

a und c heißen Vorderglieder, b und d Hinterglieder (mit Rücksicht auf die Verhältnisse), a und d äußere, b und c innere oder mittlere Glieder. Zwei Glieder, welche in beiden Verhältnissen gleiche Stellungen haben, nämlich a und c, b und d, heißen homologe Glieder; zwei Glieder, welche in beiden Verhältnissen ungleiche Stellungen haben, heißen anhomologe Glieder. Eine Proportion, in welcher zwei anhomologe Glieder gleich sind, heißt stetig. In der Proportion $a : b = c : d$ heißt d die vierte Proportionale zu a, b und c. In der stetigen Proportion $a : b = b : c$ heißt b die mittlere Proportionale zu a und c, und c die dritte Proportionale zu a und b. In mehreren Proportionen sind diejenigen Glieder homolog, welche die gleichvielte Stelle einnehmen.

§ 39.

Schafft man in der Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

die Nenner weg, so erhält man,

$$\text{da } \frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d,$$

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Es ergibt sich also der Lehrsatz:

1. In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren.

Geht man in der vorigen Entwicklung den umgekehrten Gang, so erhält man aus der Gleichheit der Produkte die geometrische Proportion. Ist

$$a \cdot b = c \cdot d, \text{ so ist}$$

$$\frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{c \cdot d}{b \cdot c}; \text{ mithin}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}, \text{ oder } a : c = d : b.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Ist eine Gleichung zwischen zwei Produkten gegeben, so läßt sich daraus eine geometrische Proportion bilden, in welcher die Faktoren des einen Produktes die äußeren, die Faktoren des anderen Produktes die inneren Glieder sind.

Der vorhergehende Satz kömmt am häufigsten in folgender Form zur Anwendung:

Eine geometrische Proportion ist richtig, wenn das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren ist.

§ 40.

Nach § 39, 2 darf man bei einer geometrischen Proportion alle diejenigen Veränderungen vornehmen, wobei die Gleichheit des Produktes der inneren Glieder mit dem Produkte der äußeren bestehen bleibt.

Die Gleichheit bleibt bestehen, weil die Produkte selbst nicht geändert werden, in folgenden Fällen:

1. Eine geometrische Proportion bleibt richtig, wenn man 1) die inneren Glieder, 2) die äußeren Glieder, 3) die inneren und die äußeren Glieder mit einander vertauscht, 4) die inneren Glieder zu äußeren und die äußeren zu inneren macht.

Wenn also:

$a : b = c : d$, so ist auch:

1) $a : c = b : d.$

2) $d : b = c : a.$

3) $d : c = b : a.$

4) $b : a = d : c.$

Die Gleichheit der Produkte bleibt bestehen, weil die Produkte auf dieselbe Weise geändert werden, in folgenden Fällen:

2. Eine geometrische Proportion bleibt richtig, wenn man 1) ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Größe multiplizirt, 2) ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Größe dividirt, 3) alle Glieder mit derselben Größe multiplizirt, 4) alle Glieder durch dieselbe Größe dividirt, 5) alle Glieder mit derselben Zahl potenzirt, 6) alle Glieder durch dieselbe Zahl radizirt. Wenn also:

$a : b = c : d$, so ist auch

1) $a \cdot m : b = c \cdot m : d.$

2) $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d.$

3) $a \cdot m : b \cdot m = c \cdot m : d \cdot m.$

4) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$

5) $a^m : b^m = c^m : d^m.$

6) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$

§ 41.

Sind mehrere Proportionen gegeben:

$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1,$$
$$a_2 : b_2 = c_2 : d_2,$$
$$a_3 : b_3 = c_3 : d_3 \text{ u. s. w., so folgt,}$$
$$a_1 \cdot d_1 = b_1 \cdot c_1,$$
$$a_2 \cdot d_2 = b_2 \cdot c_2,$$
$$a_3 \cdot d_3 = b_3 \cdot c_3 \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich durch Multiplikation und durch Division Gleichungen zwischen Produkten bilden, also neue Proportionen aufstellen.

Durch Multiplikation erhalten wir:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$, mithin nach § 39, 2

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 : b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 : d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$.

Durch Division erhalten wir:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \text{ u. s. w.; mithin nach § 39, 2}$$
$$\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} : \frac{d_1}{d_2}.$$

Es ergibt sich also der Lehrsatz:

1. Sind mehrere geometrische Proportionen gegeben, so läßt sich aus denselben eine neue Proportion bilden, indem man die homologen Glieder miteinander multiplizirt oder durch einander dividirt.

§ 42.

Während nach dem Vorstehenden geometrische Proportionen sich immer durch Multiplikation oder Division der homologen Glieder vereinigen lassen, läßt sich dasselbe durch Addition oder Subtraktion nur dann ausführen, wenn die entsprechenden Produkte der inneren und äußeren Glieder einen Factor gemeinschaftlich haben, wenn also

$$a_1 = a_2 = a_3, \text{ und}$$
$$b_1 = b_2 = b_3.$$

Dieses ist der Fall, wenn wir haben:

$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1,$$
$$a_1 : b_1 = c_2 : d_2,$$
$$a_1 : b_1 = c_3 : d_3 \text{ u. s. w.,}$$

oder wenn ist: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3}$ u. s. w.

Alsdann ergibt sich:

$$a_1 \cdot d_1 = b_1 \cdot c_1;$$
$$a_1 \cdot d_2 = b_1 \cdot c_2;$$
$$a_1 \cdot d_3 = b_1 \cdot c_3.$$

Mithin $a_1 (\pm b_1 \pm d_1 \pm d_2 \pm d_3$ u. s. w.$) = b_1 (\pm a_1 \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3$ u. s. w.$)$.
Folglich $a_1 : b_1 = (\pm a_1 \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3$ u. s. w.$) : (\pm b_1 \pm d_1 \pm d_2 \pm d_3$ u. s. w.$)$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Sind mehrere geometrische Verhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zu der Summe aller Hinterglieder wie ein beliebiges Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Ebenso ergibt sich:

2. Haben mehrere geometrische Proportionen ein Verhältniß gemeinschaftlich, so verhält sich die Summe aller nicht gemeinschaftlichen Vorderglieder zu der Summe aller nicht gemeinschaftlichen Hinterglieder wie das gemeinschaftliche Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Wenden wir 1. auf eine einzige Proportion

$a : b = c : d$ an, so erhalten wir

$$a + c : b + d = a : b$$
$$= c : d, \text{ und}$$
$$a - c : b - d = a : b$$
$$= c : d.$$

Daraus ergibt sich:

$$a + c : b + d = a - c : b - d.$$

Vertauscht man in der Proportion $a : b = c : d$ die inneren Glieder, so ergibt sich:

$a : c = b : d$. Daraus folgt nach 1:

$$a + b : c + d = a : c$$
$$= b : d, \text{ und}$$
$$a - b : c - d = a : c$$
$$= b : d. \text{ Mithin auch:}$$
$$a + b : c + d = a - b : c - d, \text{ oder}$$
$$a + b : a - b = c + d : c - d.$$

Wir erhalten also die Lehrsätze:

3. In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zu der Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

4. In einer geometrischen Proportion verhält sich die Differenz der Vorderglieder zu der Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

5. In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zu ihrer Differenz wie die Summe der Hinterglieder zu ihrer Differenz.

6. In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der zwei ersten Glieder zu der Summe der zwei letzten wie das erste Vorderglied zum zweiten oder wie das erste Hinterglied zum zweiten.

7. In einer geometrischen Proportion verhält sich die Differenz der zwei ersten Glieder zu der Differenz der zwei letzten wie das erste Vorderglied zum zweiten oder wie das erste Hinterglied zum zweiten.

8. In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der zwei ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die Summe der zwei letzten Glieder zu ihrer Differenz.

§ 43.

Die Antworten auf die folgenden Fragen sollen zur Aufstellung von Lehrsätzen benutzt werden.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} = \frac{6}{x} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \end{array}\right\}; \text{ wie groß ist } x?$$

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{c}; \text{ wie groß ist } y?$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{c}; \text{ wie groß ist } x?$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Was für ein Bruch ist $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, wenn 1) $a > b$, 2) $a < b$, 3) $a = b$?

Wenn a das größte Glied der Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, was gilt dann von d?

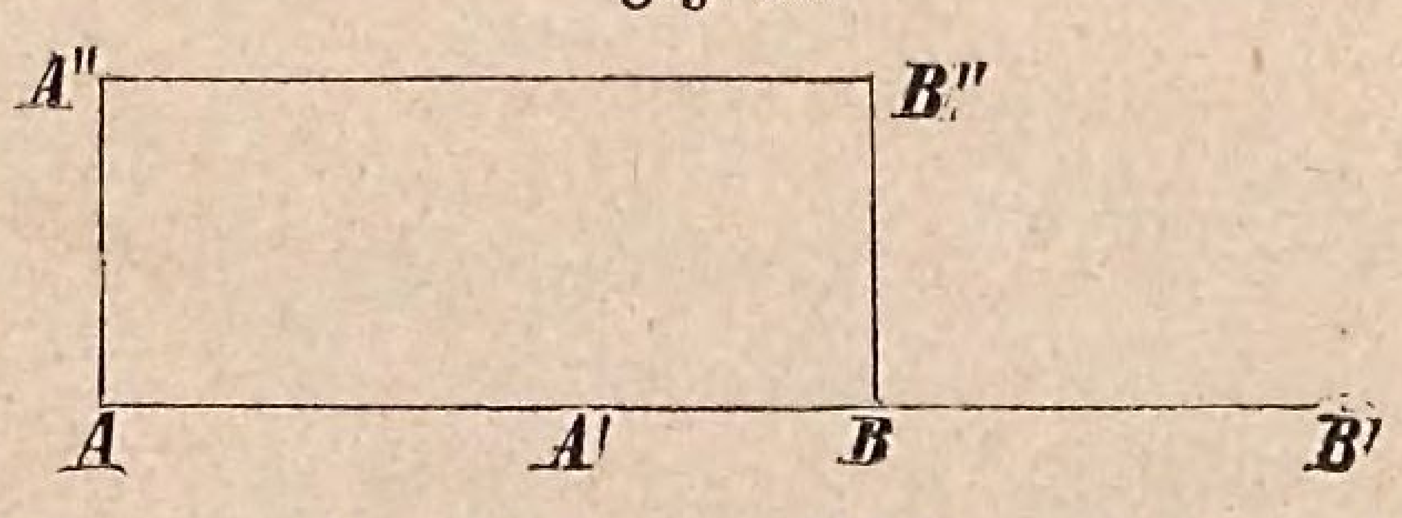
Fünftes Kapitel.

Größenvergleichung geradliniger Figuren.

§ 44.

Die Fläche entsteht durch die Bewegung einer Linie aus sich heraus, die ebene Fläche durch Bewegung einer geraden Linie in unveränderter Richtung aus sich heraus. Der Flächeninhalt ist daher abhängig von der Größe der erzeugenden Linie und der Größe der Bewegung. Die Linie aber muß aus sich heraustreten, wenn ein flächenhaftes Gebilde entstehen soll. Die Strecke AB (Fig. 69) kann sich nämlich in ihrer Richtung bewegen, etwa aus der Lage AB bis in die Lage A′B′. Bei dieser Bewegung hat jeder Punkt einen Weg gleich AA′ = BB′ zurückgelegt, aber es ist nur eine Linie entstanden, weil das Ergebniß der Bewegung des einen Punktes theilweise oder ganz zusammenfällt mit den Ergebnissen der Bewegung anderer Punkte.

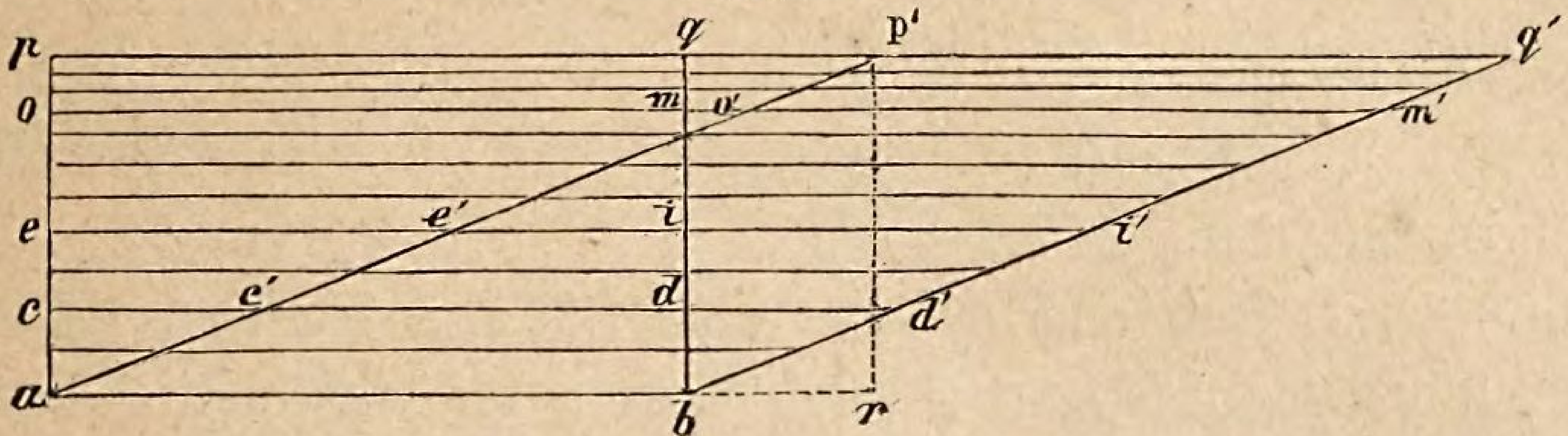
Fig. 69.



Dagegen bewegt sich AB vollständig aus sich heraus, wenn jeder Punkt eine Linie beschreibt, die weder nach der einen noch nach der anderen Seite von AB geneigt ist, die also auf AB senkrecht steht. Legt nun jeder Punkt von AB wiederum einen Weg gleich AA′ zurück, ist also AA′ = AA″ = BB″, und AA″ sowie BB″ senkrecht auf AB, so hat AB durch diese Bewegung die Fläche ABB″A″ erzeugt, obwohl diese Bewegung der Größe nach der vorigen gleich. Während aber hier die erzeugende Strecke in immer neue Lagen kommt, wird bei der Bewegung der Strecke von AB bis A′B′ jede Punktlage von unendlich vielen Punkten hintereinander durchlaufen. Es ist also die Bewegung einer Linie senkrecht aus sich heraus, welche flächenerzeugend ist, wogegen die Bewegung einer Linie in sich immer nur eine Linie erzeugt, zur Flächenerzeugung also nichts beiträgt.

Eine schiefe ebene Fläche wie Parallelogramm abq'p' (Fig. 70) kann man sich entstanden denken, indem ab sich senkrecht aus sich herausbewegt, so daß das Rechteck abqp erzeugt wird, dabei aber in jeder Lage soweit in

Fig. 70.



sich nach rechts sich bewegt, daß der linke Endpunkt auf ap' fällt, z. B. cd bewegt sich in der Richtung cd nach rechts bis in die Lage c'd', ebenso ei bis e'i', om bis o'm', pq bis p'q'. Da bei der Bewegung der Linie in sich nur gleiche Strecken für einander gesetzt werden, zudem diese Bewegung nicht flächenerzeugend ist, so ist Rechteck abqp gleich Parallelogramm abq'p'. Ebenso ist △ app' = △ bqq'. Da ferner ein Rechteck durch die beiden aufeinander folgenden Seiten bestimmt ist, also Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe congruent sind, so erhalten wir den Lehrsatz:

1. Ein Parallelogramm ist gleich einem Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe (Fig. 70).

V.: Höhe p'r = pa.

Beh.: Parallelogramm abq'p' = Rechteck abqp.

Bew.: ap = bq.
ap' = bq'.
∢ pap' = qbq' (als Parallelwinkel).

△ pap' = qbq' (§ 26, 3).

Ziehen wir △ pap' von der ganzen Figur abq'p ab, so bleibt das Parallelogramm abq'p'. Ziehen wir dagegen △ qbq' von abq'p ab, so bleibt das Rechteck abqp. Mithin ist

▱ abq'p' = abqp.

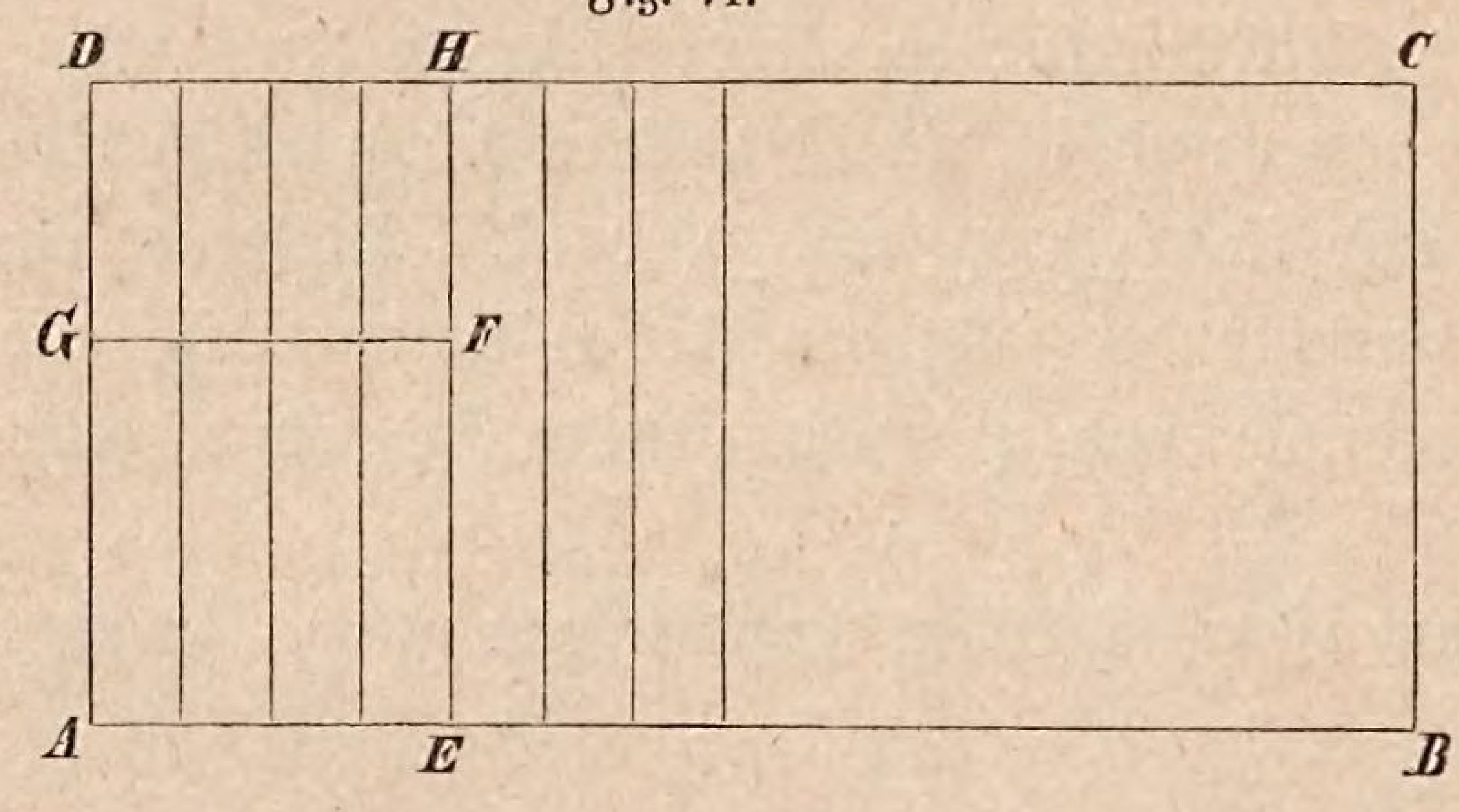
Aus der Entstehungsweise des Rechtecks abqp ergibt sich, daß aus jedem Punkte von ab eine gerade Linie geworden, die gleich ap. Die gerade Linie ab besteht zwar nicht aus Punkten, sondern ist durch die Bewegung eines Punktes entstanden. Betrachten wir aber den ab erzeugenden Punkt in jeder Lage, die er zwischen a und b während der Bewegung einnimmt, so wird aus jeder Punktlage bei der Erzeugung des Rechtecks abqp eine ap gleiche Strecke, ohne daß die von dem einen

Punkte erzeugte Strecke mit der von einem anderen hervorgebrachten theilweise oder ganz zusammenfiele. Mithin ist der Inhalt vom Rechteck abqp gleich ab·ap = ab·p'r. Nennen wir ab als Grundlinie g und p'r als Höhe des Parallelogramms h, so ist der Inhalt J = g·h. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Um diesen Satz auch auf eine andere Art zu beweisen, müssen wir den Inhalt des Parallelogramms vergleichen mit der Maßeinheit. Als solche wird genommen das Quadrat über der Längeneinheit. Statt des Parallelogramms aber nehmen wir das ihm gleiche Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe. Es sei (Fig. 71) ABCD ein Rechteck und Quadrat AEFG die Flächeneinheit.

Fig. 71.



Da man aber □ AC mit □ AF nicht direkt vergleichen kann, verlängern wir EF über F bis H und erhalten als Hülfsgröße □ AH, welches mit □ AC die Höhe AD und mit □ AF die Grundlinie AE gemeinschaftlich hat. Wir vergleichen nun die beiden Rechtecke AC und AH, welche gleiche Höhen haben.

Die Grundlinien AB und AE sind entweder commensurabel oder incommensurabel, d. h. sie haben entweder ein gemeinschaftliches Maß oder nicht.

Erster Fall: AB und AE haben ein gemeinschaftliches Maß m. Es sei AB = p·m und AE = q·m. Alsdann ist

$$AB : AE = p \cdot m : q \cdot m$$
$$= p : q.$$

Nun tragen wir von A aus auf AB das Maß m auf; dann fällt ein Theilpunkt in E und einer in B. AE ist jetzt in q und AB in p gleiche Theile getheilt. Durch die Theilpunkte ziehen wir Parallelen zu AD. Dadurch wird □ AH in q und □ AC in p Rechtecke getheilt, welche alle unter sich gleich sind, und wovon jedes r heißen möge. Alsdann ist □ AC = p·r und □ AH = q·r.

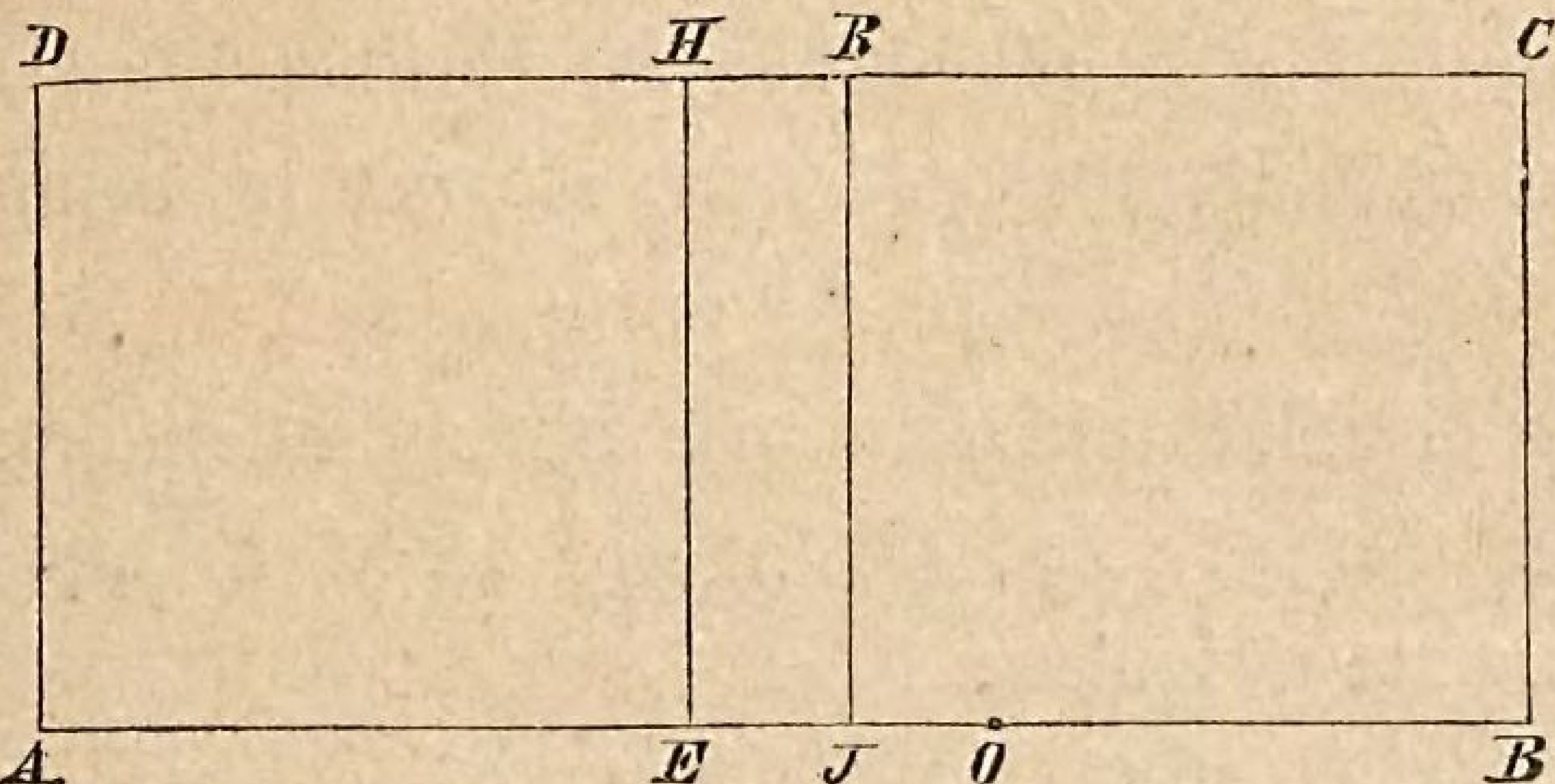
Mithin ist:

$$\square\,AC : \square\,AH = p \cdot r : q \cdot r$$
$$= p : q.$$ Es ist aber auch:
$$AB : AE = p : q.$$

$$\square\,AC : \square\,AH = AB : AE.$$

Zweiter Fall: AB und AE (Fig. 72) sind incommensurabel.

Fig. 72.



Gesetzt nun, es wäre nicht

$$\square\,AC : \square\,AH = AB : AE,$$ sondern
$$\square\,AC : \square\,AH = AB : AO.$$

Wir suchen nun einen aliquoten Theil von AB (d. h. einen Theil, der in AB ohne Rest aufgeht), welcher kleiner als EO ist. Diesen tragen wir von A aus auf AB auf. Alsdann muß ein Theilpunkt zwischen E und O fallen, da ja der aliquote Theil von AB kleiner als EO ist. Dieser Theilpunkt sei J. Nun sind AB und AJ commensurabele Linien. Ziehen wir jetzt JR parallel AD, so haben wir nach dem ersten Fall:

$$\square\,AC : \square\,AR = AB : AJ.$$ Wenn aber
$$\square\,AC : \square\,AH = AB : AO,$$ so ergibt sich

$$\square\,AR : \square\,AH = AJ : AO,$$

wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die innern Glieder in jeder der beiden Proportionen vertauscht. Nun ist aber $\square\,AR > \square\,AH$, aber $AJ < AO$. Es kann aber das Größere sich nicht zum Kleineren verhalten wie das Kleinere zum Größeren, oder ein unechter Bruch ist nie gleich einem echten. Der Widerspruch hebt sich nur dann, wenn O mit E zusammenfällt, d. h. wenn die Behauptung richtig ist.

Vergleichen wir nun $\square\,AH$ mit $\square\,AF$ (Fig. 71), so können wir AD und AG als Grundlinien ansehen. Alsdann ist AE die gemeinschaftliche Höhe. Mithin: $\square\,AH : \square\,AF = AD : AG.$ Nach dem Obigen aber:

$$\square\,AC : \square\,AH = AB : AE.$$

$$\square\,AH \cdot \square\,AC : \square\,AF \cdot \square\,AH = AB \cdot AD : AE \cdot AG$$ (§ 41,1), oder
$$\square\,AC : \square\,AF = AB \cdot AD : AE \cdot AG.$$

Es ist also, da AG = AE:

$$\frac{\square\ AC}{\square\ AF} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AD}{AE}.$$

$\frac{\square\ AC}{\square\ AF}$ gibt an, wie oft die Flächeneinheit in dem Rechteck enthalten ist, ist mithin die Inhaltszahl des Rechtecks, die wir J' nennen. $\frac{AB}{AE}$ ist, da AE die Längeneinheit, die Inhaltszahl der Grundlinie, die wir g' nennen; ebenso ist $\frac{AD}{AE}$ die Inhaltszahl der Höhe, die wir h' nennen. Es ist also

$$J' = g' \cdot h'.$$

Will man die Multiplikation von Linien miteinander vermeiden, so muß man unter Inhalt die Inhaltszahl verstehen, und Lehrsatz 2 muß dann streng genommen lauten:

Die Inhaltszahl eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte der Inhaltszahlen der Grundlinie und der Höhe.

Nach unserer Definition von Multiplikation (§ 36) können auch Linien mit einander multiplizirt werden und ergeben als Produkt eine Fläche.

Wir werden daher die Grundlinie g, die Höhe h und den Inhalt J nennen. Wir haben also nach Lehrsatz 2

$$J_{\square} = g \cdot h.$$

Daraus ergibt sich der Lehrsatz:

3. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

Wenn die Inhalte zweier Parallelogramme J_1 und J_2 sind, ihre Grundlinien g_1 und g_2, ihre Höhen h_1 und h_2 heißen, so ist

$$J_1 : J_2 = g_1 \cdot h_1 : g_2 \cdot h_2.$$

Wenn $g_1 = g_2$, erhalten wir:

$$J_1 : J_2 = h_1 : h_2;$$

und wenn $h_1 = h_2$, so ist:

$$J_1 : J_2 = g_1 : g_2.$$

Wir erhalten also die Lehrsätze:

4. Die Inhalte zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe.

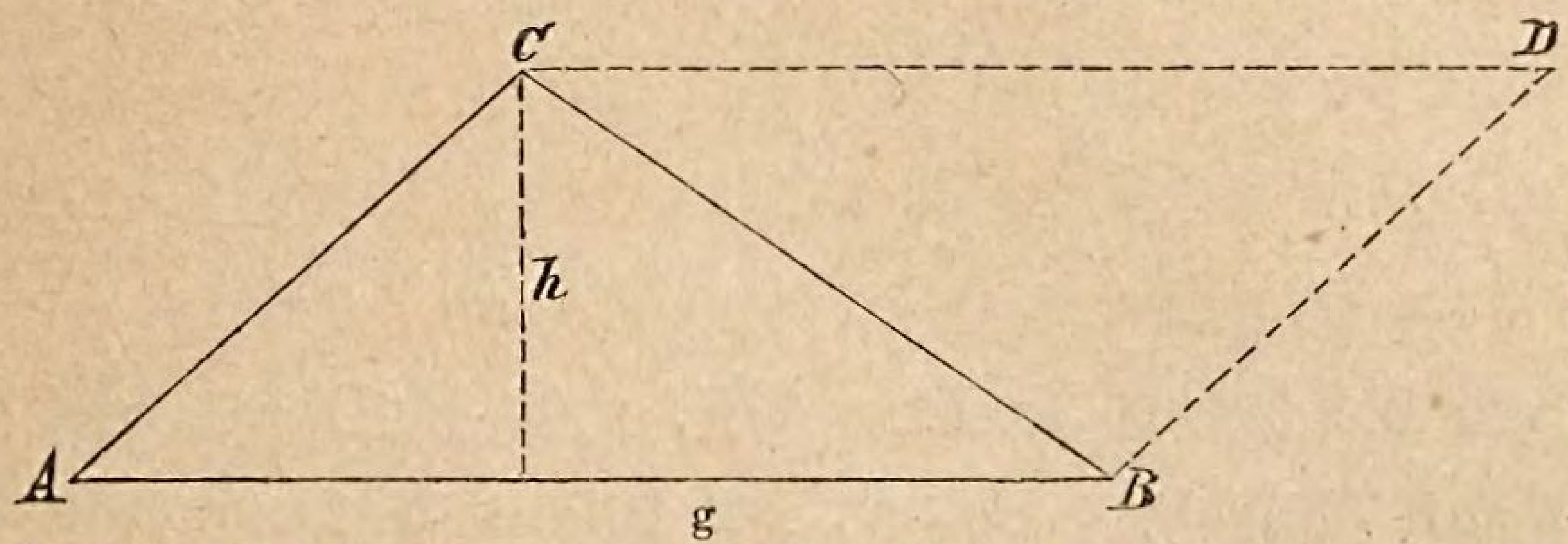
5. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

6. Parallelogramme mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§ 45.

Um den Inhalt eines Dreiecks zu finden, vergleichen wir denselben mit dem eines Parallelogramms.

Fig. 73.



Soll der Inhalt von △ ABC gefunden werden, so vollenden wir das Parallelogramm zwischen AB und AC. Es sei ▱ ABDC. Dieses hat mit △ ABC gleiche Grundlinie und Höhe und ist das Doppelte desselben. Da nun

$$J_{\square} = g \cdot h, \text{ so ist}$$
$$J_{\triangle} = \frac{1}{2} g \cdot h.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Wie aus der Formel $J_{\square} = g \cdot h$ die Lehrsätze 3 bis 6 sich ergeben, so erhalten wir aus $J_{\triangle} = \frac{1}{2} g \cdot h$ folgende Lehrsätze:

2. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.
3. Die Inhalte zweier Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe.
4. Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.
5. Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§ 46.

Im Dreiecke und im Parallelogramme kann man jede Seite als Grundlinie nehmen. Alsdann ist die von der gegenüberliegenden Ecke auf dieselbe gefällte Senkrechte die entsprechende Höhe.

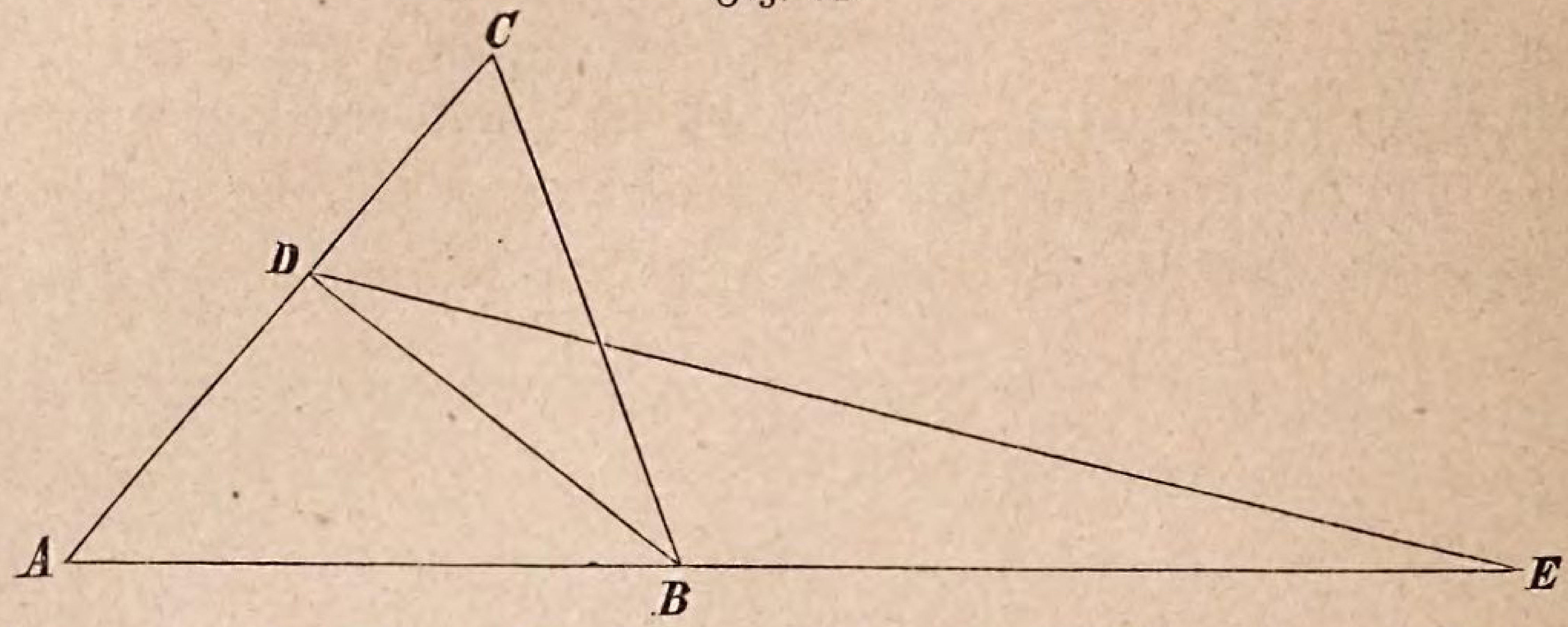
Verschiebt man daher die Ecke C (Fig. 74) des Dreiecks ABC von C nach D, so ist:

$$\triangle \text{ABC} : \triangle \text{ABD} = \text{AC} : \text{AD}.$$

Verschiebt man jetzt die Ecke B des Dreiecks ABD von B bis E, so ist:

$$\triangle \text{ABD} : \triangle \text{AED} = \text{AB} : \text{AE}.$$

Fig. 74.



Um nun die beiden Dreiecke ABC und AED zu vergleichen, multiplizieren wir die homologen Glieder der beiden Proportionen miteinander.

Alsdann ergibt sich:

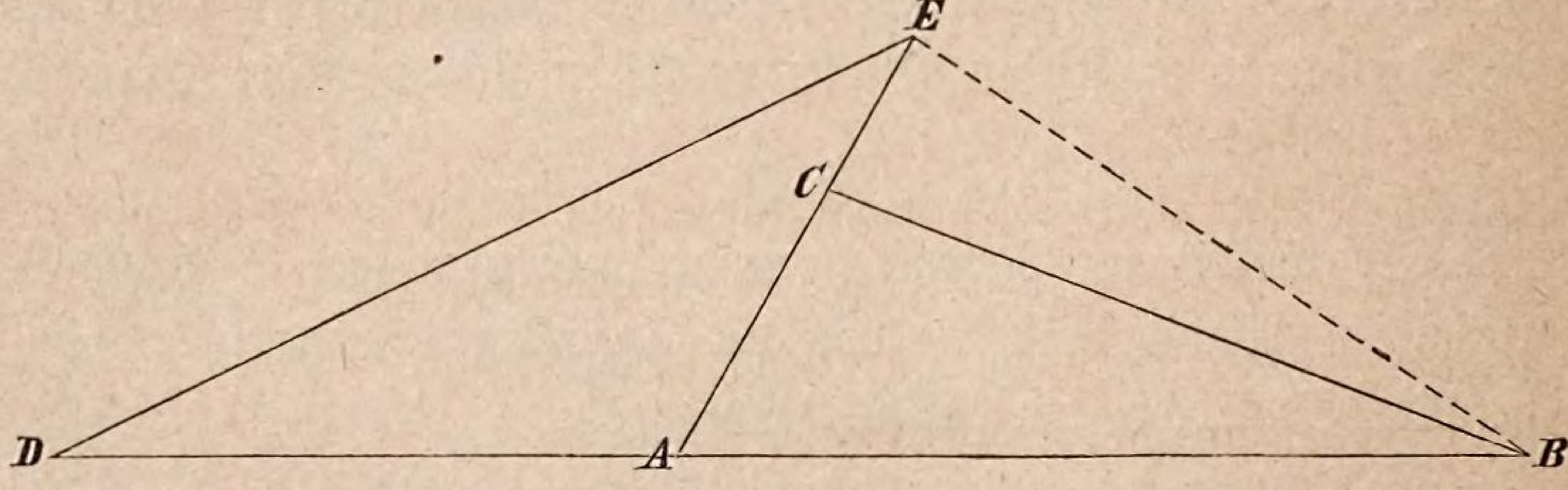
$\triangle ABC \cdot \triangle ABD : \triangle ABD \cdot \triangle AED = AC \cdot AB : AD \cdot AE$, oder

$\triangle ABC : \triangle AED = AC \cdot AB : AD \cdot AE.$

Die beiden Dreiecke haben den Winkel A gemeinschaftlich, und es können alle Dreiecke, welche in einem Winkel übereinstimmen, in die obige Lage gebracht werden.

Da das Parallelogramm das Doppelte eines Dreiecks ist, so gilt von zwei in einem Winkel übereinstimmenden Parallelogrammen ebenfalls die obige Beziehung. Zwei Parallelogramme stimmen aber auch in einem Winkel überein, wenn sie supplementare Winkel haben. Gilt aber die obige Beziehung für Parallelogramme mit Supplementwinkeln, so auch für ihre Hälften, also bei Dreiecken mit Supplementwinkeln. Letzteres läßt sich auch auf dieselbe Weise wie bei den Dreiecken ABC und AED (Fig. 74) bei den Dreiecken ABC und AED (Fig. 75) mit Hülfe des Dreiecks AEB zeigen.

Fig. 75.



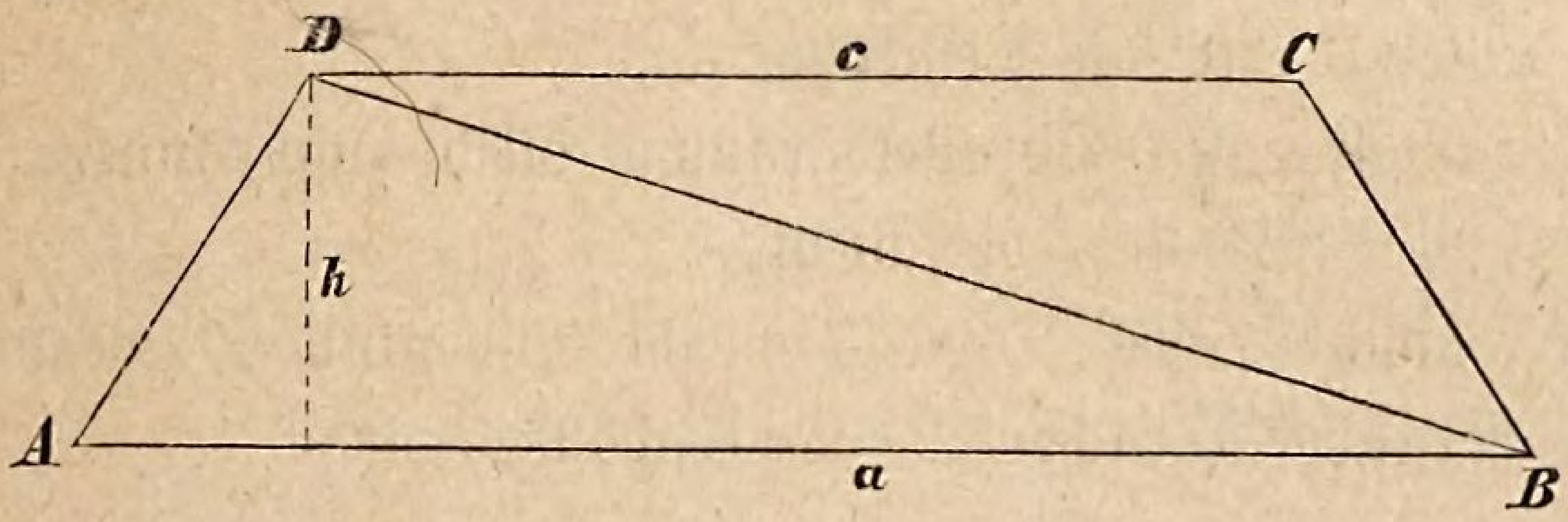
Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Zwei Dreiecke oder zwei Parallelogramme, welche in einem Winkel übereinstimmen, oder bei welchen ein Winkel des einen supplementar ist einem Winkel des anderen, verhalten sich wie die Produkte der jene Winkel einschließenden Seiten.

§ 47.

Da man jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen kann, z. B. dadurch, daß man eine Ecke mit jeder anderen nicht benachbarten Ecke durch Diagonalen verbindet, so läßt sich der Inhalt jedes Vielecks bestimmen.

Fig. 76.



Zieht man in dem Trapeze ABCD (Fig. 76) die Diagonale BD und die Höhe h, so ist:

$$\triangle\ ABD = \frac{1}{2}\ a \cdot h.$$

$$\triangle\ BCD = \frac{1}{2}\ c \cdot h.$$

$$\square\ ABCD = \frac{1}{2}\ (a + c) \cdot h.$$

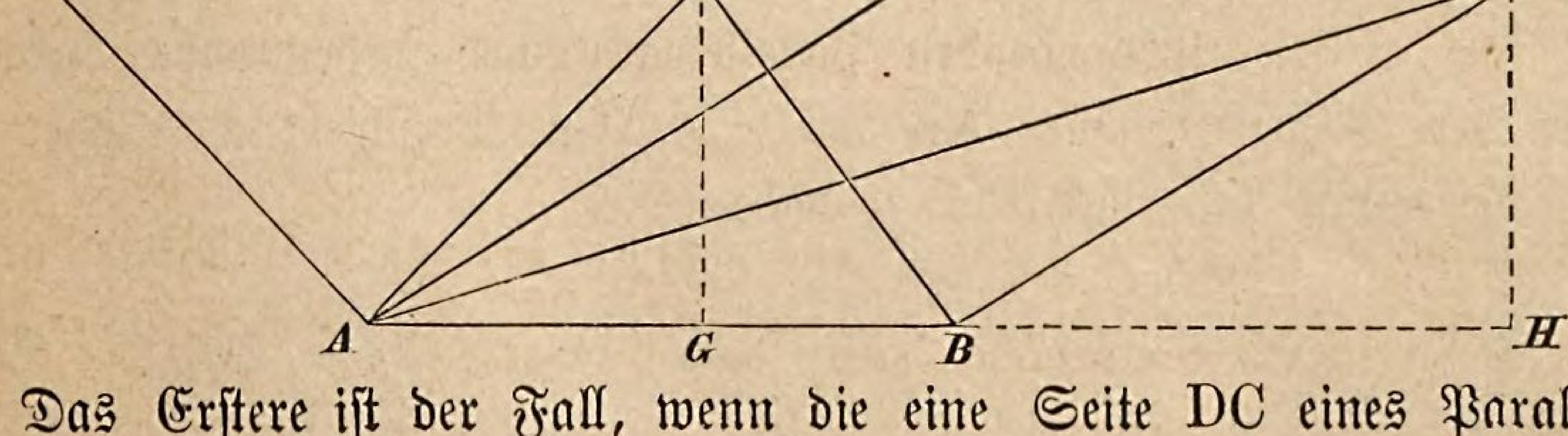
Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe der parallelen Seiten und ihrem gegenseitigen Abstande.

§ 48.

Da $J_{\square} = g \cdot h$ und $J_{\triangle} = \frac{1}{2}\ g \cdot h$, so bleibt der Inhalt eines Parallelogramms oder eines Dreiecks unverändert, wenn die Produkte aus Grundlinie und Höhe sich nicht ändern. Diese Produkte aber bleiben unverändert, 1) wenn g und h unverändert bleiben, 2) wenn die eine von den beiden Größen g und h soviel mal kleiner als die andere größer wird.

Fig. 77.



Das Erstere ist der Fall, wenn die eine Seite DC eines Parallelo=

gramms ABCD (Fig. 77) in ihrer Geraden verschoben wird, etwa nach EF. Da die Grundlinie AB geblieben, die Höhe FH = CG, so sind g und h unverändert geblieben. Dasselbe ist der Fall für die Dreiecke ABC und ABF. Es ist also ▱ ABCD = ABFE und △ ABC = ABF.

Wir erhalten daher die Lehrsätze:

1. Der Inhalt eines Parallelogramms bleibt unverändert, wenn man eine Seite in ihrer Geraden verschiebt.

2. Der Inhalt eines Dreiecks bleibt unverändert, wenn eine Ecke parallel zur gegenüberliegenden Seite verschoben wird.

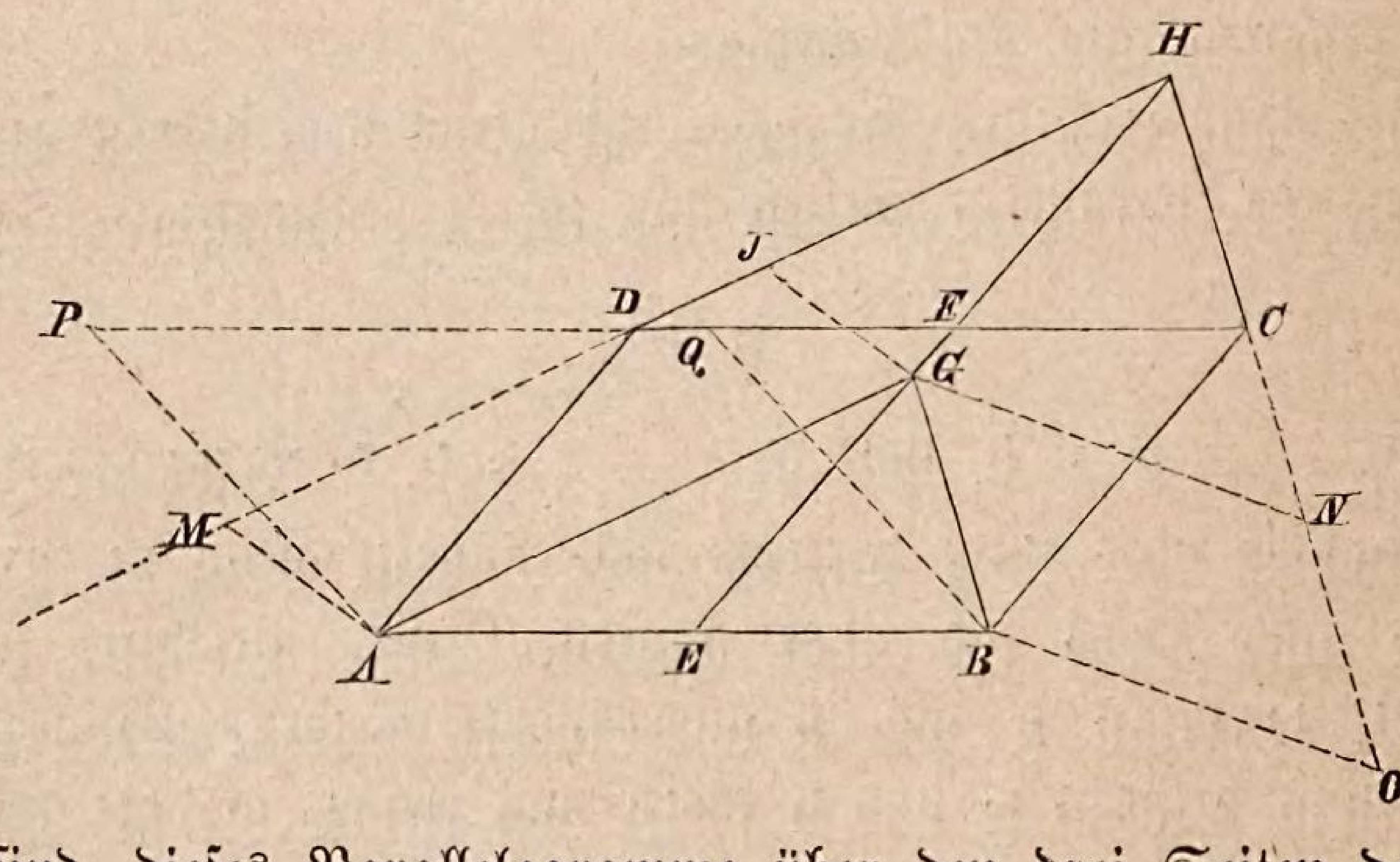
§ 49.

Statt das ganze Parallelogramm auf einmal zu verschieben, wie in § 48, kann man dasselbe zuerst in zwei Parallelogramme zerlegen. Wenn (Fig. 78) EF ⋕ AD, und man EF nach GH verschiebt, so ist

▱ AEFD = ▱ AGHD, oder ▱ AF = ▱ AH,
▱ EBCF = ▱ BCHG, oder ▱ BF = ▱ BH.

▱ ABCD = ▱ AGHD + ▱ BCHG, oder ▱ AC = ▱ AH + ▱ BH.

Fig. 78.



Es sind dieses Parallelogramme über den drei Seiten des Dreiecks ABG. Man kann nun noch HD nach JM, und HC nach NO verschieben. Die Seiten MJ und NO, die Gegenseiten der Dreiecksseiten AG und BG in den entsprechenden Parallelogrammen, gehen dabei durch die Ecken der Gegenseite von AB im ▱ AC. Verschiebt man aber auch diese Gegenseite DC nach PQ, so haben wir

▱ AQ = ▱ AJ + ▱ BN.

Diese Parallelogramme haben das Charakteristische, daß die Gegenseiten der Seiten des Dreiecks ABG verlängert ein dem Dreieck ABG

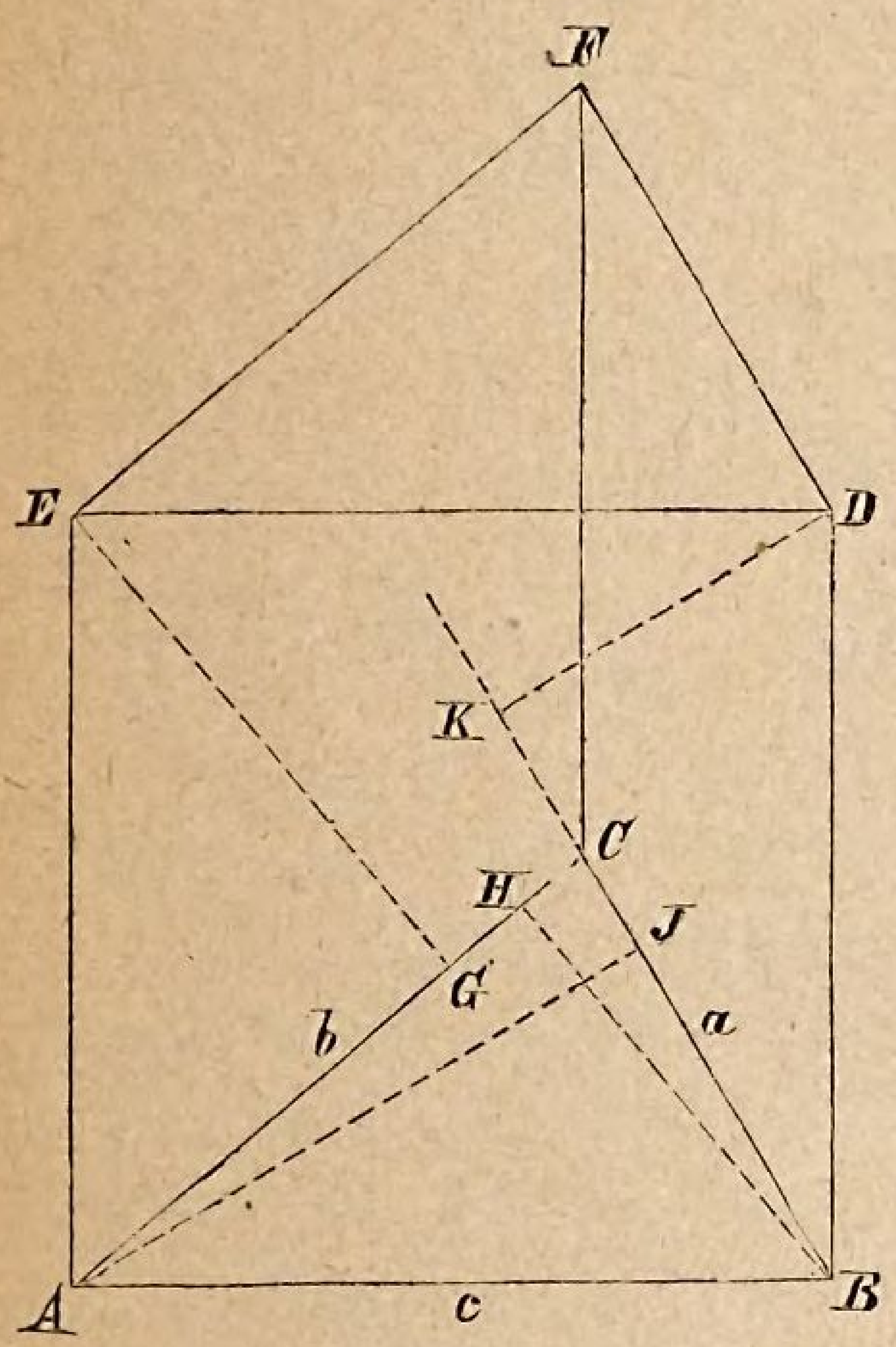
congruentes und parallelseitiges Dreieck DCH bilden. Ist umgekehrt dieses Dreieck dem Dreiecke ABG congruent und parallelseitig, so ist

$$\square\, AC = \square\, AH + \square\, BH.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks Parallelogramme, so daß die Gegenseiten der Dreiecksseiten oder ihre Verlängerungen ein demselben congruentes Dreieck bilden, so ist das eine Parallelogramm gleich der Summe der beiden anderen.

Fig. 79.



Um nun ein bestimmtes Größenverhältniß der Seiten eines Dreiecks zu erhalten, construiren wir über der einen Seite AB des Dreiecks ABC (Fig. 79) das Quadrat ABDE und über ED ein dem Dreieck ABC congruentes und parallelseitiges Dreieck EDF.

Alsdann ist:

$$AB^2 = \square\, AF + \square\, BF$$
$$= AC \cdot EG + BC \cdot DK, \text{ oder}$$
$$c^2 = b \cdot EG + a \cdot DK, \text{ wenn}$$
$$EG \perp AC \text{ und } DK \perp BC.$$

Nun ist aber $\triangle\, AEG \cong BAH$ und $\triangle\, AJB \cong BKD$, wenn $BH \perp AC$ und $AJ \perp BC$; folglich $EG = AH = {}^cP_b$ (Projektion von c auf b), und $KD = BJ = {}^cP_a$.

Mithin ist:

$$c^2 = b \cdot {}^cP_b + a \cdot {}^cP_a.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der beiden Rechtecke zwischen je einer der beiden anderen Dreiecksseiten und der Projektion der ersteren auf dieselbe.

Wenn (Fig. 80) $\gamma = R$, so ist ${}^cP_b = b$ und ${}^cP_a = a$.

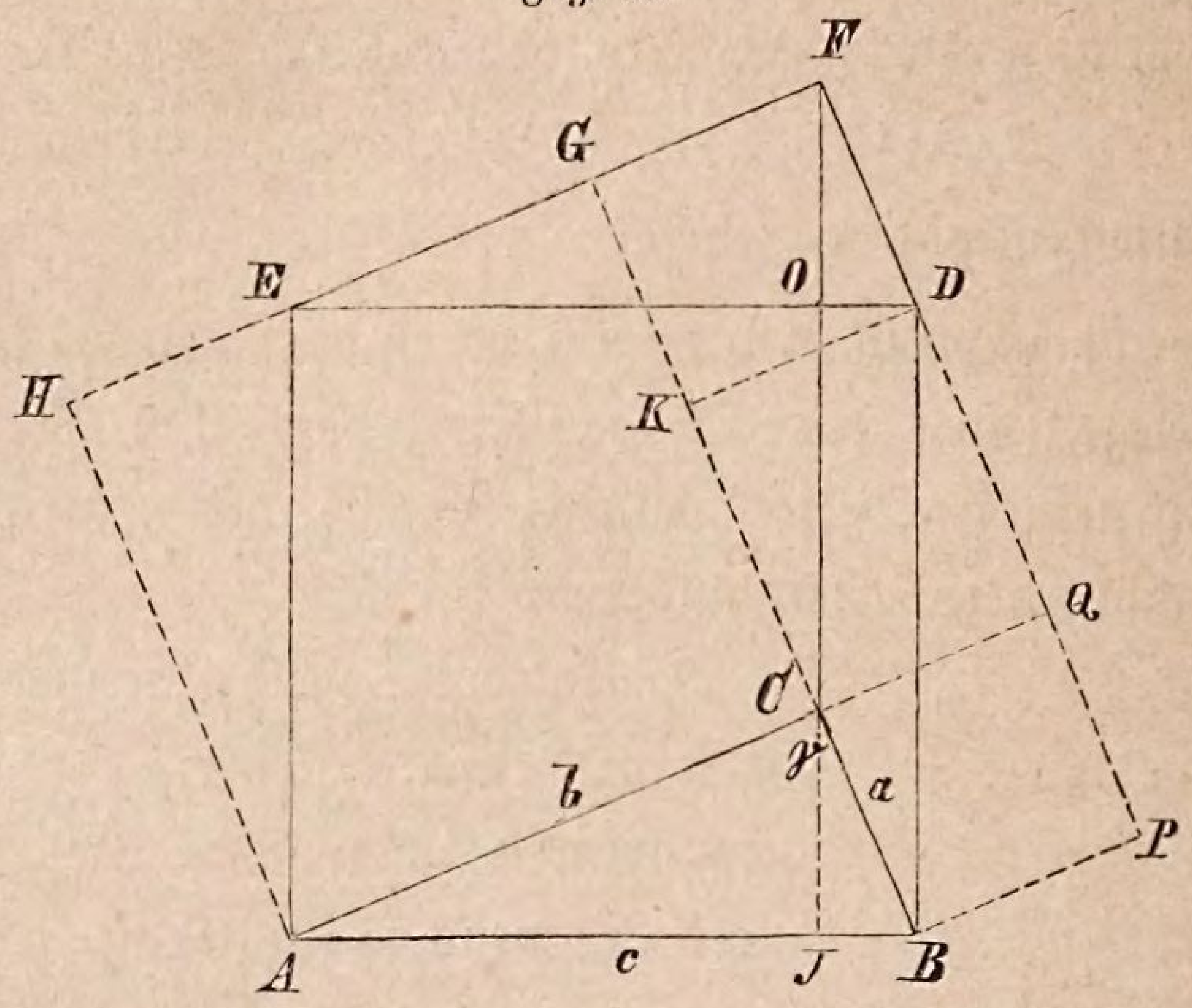
Mithin nach 2 $c^2 = a^2 + b^2$.

Wir erhalten also den Pythagoräischen Lehrsatz:

3. Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Aus Fig. 80 ersieht man leicht, daß

Fig. 80.



$$
\begin{aligned}
b^2 &= \square\ \mathrm{ACGH}\ (\text{da } \mathrm{AH} = b)\\
&= \square\ \mathrm{ACFE}\\
&= \square\ \mathrm{AJOE} = \square\ \mathrm{AO}\\
&= \square\ \mathrm{AE}\cdot\mathrm{AJ}\\
&= \square\ c\cdot {}^{b}P_c.\\
a^2 &= \square\ \mathrm{BPQC}\ (\text{da } \mathrm{BP} = a)\\
&= \square\ \mathrm{CBDF}\\
&= \square\ \mathrm{JBDO}\\
&= \mathrm{BD}\cdot\mathrm{BJ}\\
&= c\cdot {}^{a}P_c.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Im rechtwinkligen Dreiecke ist ein Kathetenquadrat gleich dem Rechtecke zwischen der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

Da nach 3 $c^2 = a^2 + b^2$, so ist
$$a^2 = c^2 - b^2.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

5. Im rechtwinkligen Dreiecke ist ein Kathetenquadrat gleich dem Hypotenusenquadrat vermindert um das andere Kathetenquadrat.

Aufgaben.

§ 50.

497. Zwei Rechtecke sind gleich, und die Grundlinien derselben verhalten sich a) wie 1 zu 2, b) wie 3 zu 4, c) wie m zu n. Wie verhalten sich ihre Höhen?

498. Zwei Parallelogramme sind gleich, und zwei Höhen derselben verhalten sich wie a) 2 zu 1, b) 4 zu 5, c) m zu n. Wie verhalten sich die zugehörigen Grundlinien?

499. Ein Parallelogramm ist gleich einem Dreiecke, und eine Höhe des Parallelogramms verhält sich zu einer Höhe des Dreiecks wie a) 1 zu 2, b) 2 zu 5, c) m zu n. Wie verhalten sich die diesen Höhen entsprechenden Grundlinien?

500. Den Inhalt des Dreiecks auf dreifache Weise mit Hülfe von je einer Seite und der entsprechenden Höhe auszudrücken, wobei die Seiten mit a, b, c und die entsprechenden Höhen mit h_a, h_b, h_c bezeichnet werden.

501. Den Inhalt eines Parallelogramms auf zweifache Weise mit Hülfe von je einer der beiden aufeinander folgenden Seiten und der entsprechenden Höhe auszudrücken.

502. Wie verhalten sich die drei Höhen h_a, h_b, h_c eines Dreiecks zu einander? (Siehe Aufg. 500.)

503. Wie verhalten sich die beiden Höhen h_a und h_b eines Parallelogramms zu einander?

504. Wie darf man die Ecke eines Dreiecks verschieben?

505. Wie darf man eine Seite eines Parallelogramms verschieben?

506. Die eine Ecke eines Dreiecks so zu verschieben, daß sie in eine gegebene Gerade fällt.

507. Eine Ecke eines Vielecks so zu verschieben, daß sie in die Verlängerung einer Seite des Vielecks fällt.

508. Ein Viereck, ein Fünfeck, ein nEck a) in ein Vieleck, welches eine Ecke weniger hat, b) in ein Dreieck zu verwandeln.

509. Eine Ecke eines Dreiecks bei unverändertem Anfangspunkt und unveränderter Richtung der gegenüberliegenden Seite so zu verschieben, daß sie in einen Punkt P fällt, der liegt 1) auf einer Dreiecksseite, 2) in der Verlängerung einer Dreiecksseite, 3) im Innern des Dreiecks, 4) außerhalb des Dreiecks.

510. Ein Dreieck bei unveränderter Grundlinie c in ein anderes zu verwandeln, von welchen gegeben ist 1) α', 2) a', 3) m'_c, 4) h'_b, 5) worin $\alpha' = \beta'$, 6) worin $a' = b'$.

511. Das Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, dessen in der Geraden AB liegende Grundlinie gleich der gegebenen Strecke c', und wovon außerdem gegeben 1) $m'_{c'}$, 2) α', 3) a', 4) $h'_{b'}$, 5) $m'_{a'}$, 6) ${}^{a'}P_{c'}$, 7) ${}^{c'}P_{a'}$, 8) worin $\alpha' = \beta'$.

512. Ein Dreieck, ein Viereck, ein nEck in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches mit jenem den Winkel α gemeinschaftlich hat, und wovon außerdem gegeben 1) a', 2) $h'_{a'}$, 3) b', 4) $h'_{b'}$, 5) d_1'', 6) d'_1.

513. Ein Dreieck, dessen eine Höhe h_a ist, in ein Parallelogramm zu verwandeln, dessen eine Höhe 1) $\frac{1}{2}$ h_a, 2) $2h_a$, 3) $n \cdot h_a$, und wovon außerdem gegeben 1) α, 2) b', 3) d'_1, 4) $h'_{b'}$, 5) $m'_{a'}$, 6) $m'_{b'}$.

514. Ein Parallelogramm, dessen eine Höhe h_a ist, in ein Dreieck zu verwandeln, dessen eine Höhe gleich 1) $2h_a$, 2) $\frac{1}{3}$ h_a, 3) nh_a, und wovon außerdem gegeben 1) α', 2) b', 3) $h'_{b'}$, 4) $m'_{a'}$, 5) $m'_{b'}$.

515. Wenn man durch einen Punkt der Diagonale oder der Verlängerung der Diagonale eines Parallelogramms Parallelen mit den Seiten desselben zieht, so entstehen zwei von der Diagonale nicht durchschnittene Parallelogramme. Diese sollen rücksichtlich des Inhaltes und der Winkel mit einander verglichen werden.

516. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches dieselben Winkel und eine gegebene Seite hat.

517. Ein Dreieck in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie zu verwandeln.

518. Ein nEck in ein Rechteck zu verwandeln, wovon eine Seite gegeben ist.

519. Mit welcher Strecke muß man die Diagonale eines Rechtecks multiplizieren, um den Inhalt desselben zu bekommen?

520. Ein Dreieck, ein Parallelogramm, ein nEck in ein Rechteck zu verwandeln, wovon 1) die Diagonale, 2) der Diagonalenwinkel gegeben ist.

521. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. (Bei welchem Lehrsatz kommt die Gleichheit eines Rechtecks und eines Quadrats vor?)

522. Ein Quadrat zu construiren, welches der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist, oder eine Strecke zu construiren, deren Quadrat gleich ist der Summe der Quadrate zweier gegebener Strecken.

523. Ein Quadrat zu construiren, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

524. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich ist der Summe von n gegebenen Quadraten.

525. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich ist der algebraischen Summe von n gegebenen Quadraten (etwa $x^2 = a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - e^2$, wenn x die gesuchte, a, b, c, d, e gegebene Strecken sind).

526. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich ist a) 2, b) 4, c) n gegebenen Rechtecken.

527. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich ist a) 2, b) 5, c) n gegebenen Dreiecken, Vierecken, nEcken.

528. Ein Quadrat, ein Rechteck in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln.

529. Ein Rechteck, wovon eine Seite gegeben ist, zu construiren, welches gleich ist der Summe von n gegebenen geradlinigen Figuren.

530. Ein gegebenes Dreieck von einer Ecke aus in a) 3, b) 5, c) n gleiche Theile zu theilen.

531. Ein Parallelogramm in a) 4, b) 6, c) n congruente Parallelogramme zu theilen.

532. Ein Viereck von einer Ecke aus in a) 2, b) 5, c) n gleiche Theile zu theilen. (Man verwandle zunächst das Viereck in ein Dreieck, dessen Spitze in der betreffenden Ecke liegt.)

533. Ein Vieleck von einer Ecke aus in n gleiche Theile zu theilen.

534. Ein Vieleck von einem im Innern gelegenen Punkte aus in a) 3, b) 4, c) n gleiche Theile zu theilen.

Sechstes Kapitel.

Formvergleichung geradliniger Figuren.

§ 51.

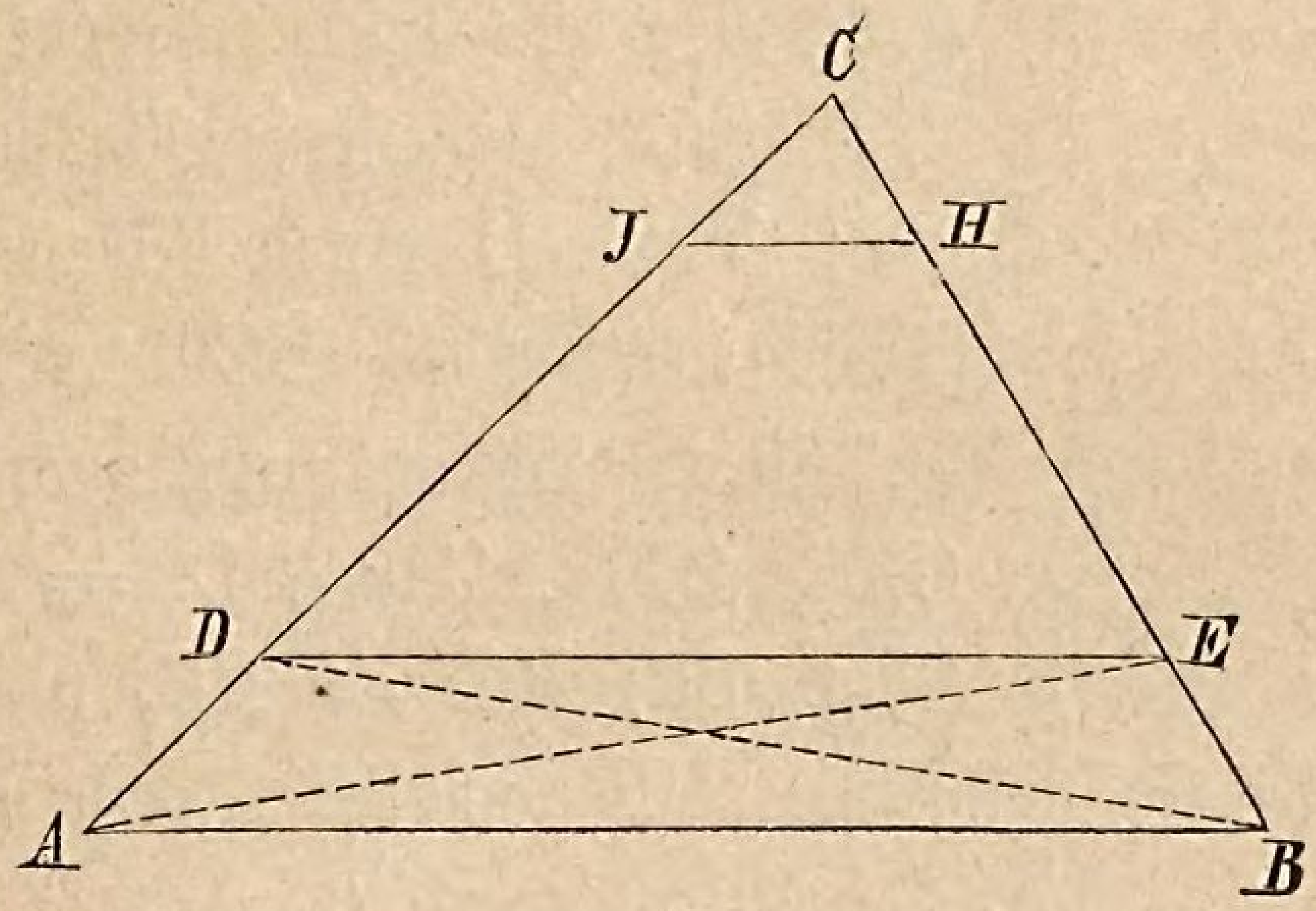
Nachdem wir congruente Figuren, d. h. Figuren, die in Inhalt und Form übereinstimmen, und gleiche Figuren, d. h. Figuren, die im Inhalte übereinstimmen, betrachtet haben, bleibt uns noch übrig, die Figuren nur rücksichtlich ihrer Form oder Gestalt zu untersuchen. Figuren, die in der Form übereinstimmen, heißen ähnlich. Sie unterscheiden sich von congruenten Figuren dadurch, daß sie von verschiedener Größe sein können; hebt man die Ungleichheit der Größe auf, so werden sie congruent. Gleiche ähnliche Figuren sind demnach congruent. Die Form ist vorzugsweise bedingt durch die Winkel. Allein die Uebereinstimmung zweier Figuren in den Winkeln reicht zur Aehnlichkeit im Allgemeinen nicht hin. So sind z. B. die Rechtecke, bei welchen die Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich sind, wofern keine Uebereinstimmung in diesen Größen vorhanden ist, nicht congruent, können also auch trotz ihrer Uebereinstimmung in den Winkeln nicht ähnlich sein, da sie sonst bei Gleichheit des Inhaltes congruent sein müßten. Wenn daher bei congruenten Figuren die Gleichheit des Inhalts aufgehoben wird, so werden sie nur dann formgleich oder ähnlich bleiben, wenn die die Größe bedingenden Ausdehnungen, also bei geradlinigen Figuren die Seiten der ihre Größe ändernden Figur, sich gleichmäßig ändern, d. h. wenn ihr Verhältniß unverändert, also dem der anderen Figur gleich, bleibt, desgleichen die Winkel sich nicht ändern. Wir erhalten also für geradlinige Figuren: Zwei Figuren sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in den Winkeln und die entsprechenden Seiten proportional sind. Zur Aehnlichkeit gehört also Uebereinstimmung in den Winkeln und Proportionalität der Seiten, während zur Congruenz Uebereinstimmung in den Winkeln und Seiten, also statt Proportionalität Gleichheit der Seiten gehört.

§ 52.

Im Dreiecke werden die Winkel nicht geändert, wenn eine Seite parallel verschoben wird. Es wird daher das Dreieck bei dieser Größenveränderung dem ursprünglichen ähnlich bleiben, wofern die Seiten beider Dreiecke proportional sind. Ehe wir also zur Aehnlichkeit übergehen können, müssen wir zuerst die Proportionalität der Linien untersuchen.

Es sei (Fig. 81) DE ⫲ AB. Nun fragt es sich, ob die Seiten des Dreiecks DEC proportional sind den Seiten des Dreiecks ABC. Da wir die Verhältnisse von Dreiecken rücksichtlich des Inhaltes kennen, welche Verhältnisse einfach sind bei Uebereinstimmung in Höhe oder Grundlinie, so verbinden wir D mit B und E mit A.

Fig. 81.



Alsdann ist:

$$\triangle\ ADE = BED \text{ (Uebereinst. in DE u. der entspr. Höhe).}$$

Da aber $\triangle\ ADE : \triangle\ DCE = AD : DC$ (§ 45, 5), und

$\triangle\ BED : \triangle\ DCE = BE : EC$, so stimmen die beiden Proportionen in dem ersten Verhältniß überein. Mithin ist:

$$AD : DC = BE : EC, \text{ oder}$$
$$AD : BE = DC : EC. \text{ Folglich}$$
$$\left.\begin{aligned}(AD + DC) : (BE + EC) &= AD : BE \\ &= DC : EC\end{aligned}\right\} \text{(§ 42, 3),}$$

oder

$$\begin{aligned}AC : BC &= AD : BE \\ &= DC : EC.\end{aligned}$$

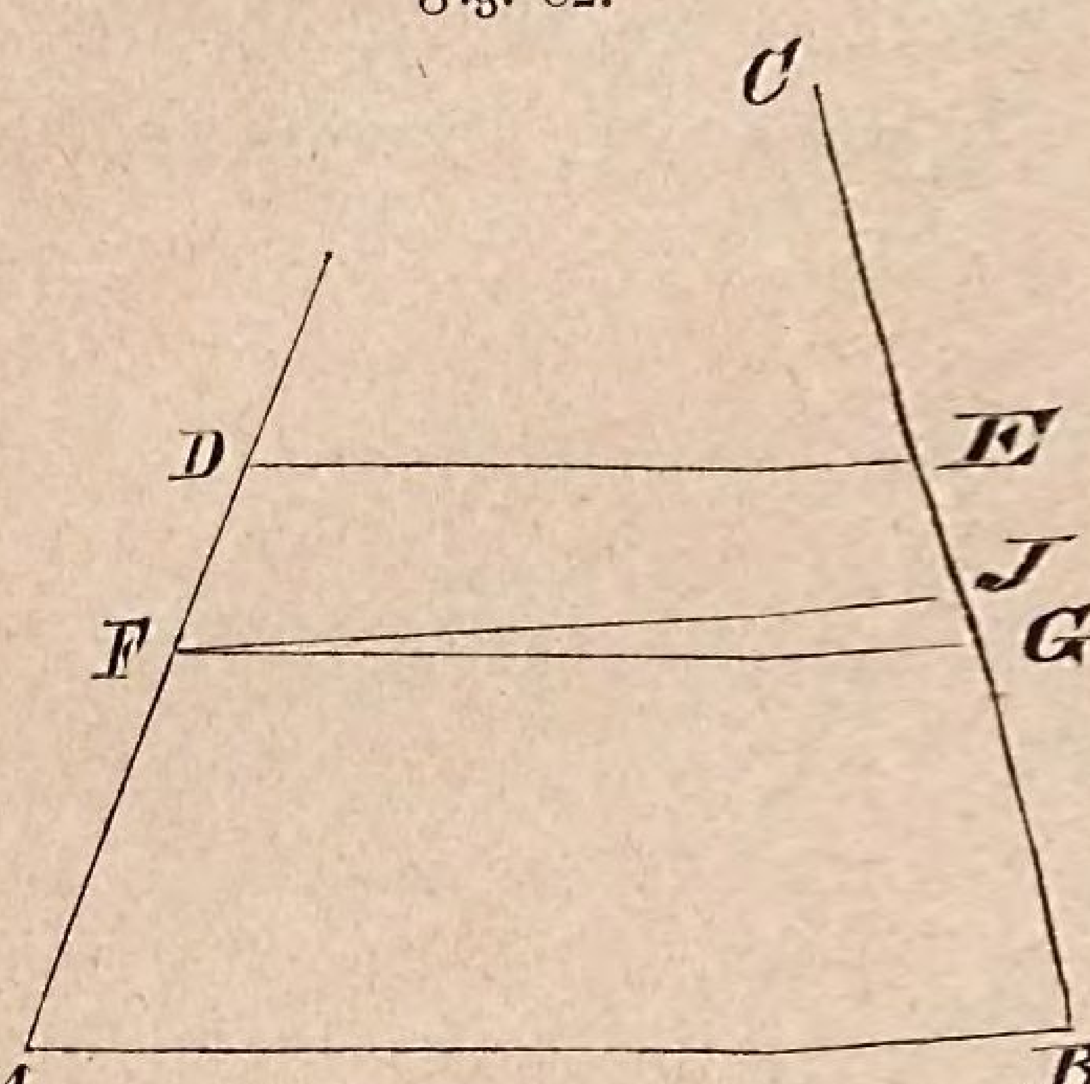
Da wir auf der Geraden AC die Strecke AD beliebig nehmen können, so ist das Verhältniß der zwei auf AC und BC zwischen zwei Parallelen gelegenen Strecken constant und gleich dem Verhältniß der zwei Strecken zwischen dem Durchschnittspunkt und einer Parallelen: AD : BE = DJ : EH = DC : EC = JC : HC = AC : BC. Sind die zwei geschnittenen Linien parallel, so sind die Strecken (AD und BE)

zwischen parallelen Schneidelinien gleich, ihr Verhältniß also gleich 1, also auch constant. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Werden zwei Geraden durch parallele Geraden durchschnitten, so ist das Verhältniß zweier zwischen denselben Parallelen gelegenen Strecken constant und zwar gleich dem Verhältniß zweier Strecken, welche zwischen dem Durchschnittspunkte und einer der Parallelen liegen.

Wenn von einer Proportion drei Glieder gegeben sind, so ist das vierte Glied vollständig bestimmt.

Fig. 82.



Wenn also die Glieder AC, BC, DC (Fig. 81) oder zwischen den Parallelen AB und FG (Fig. 82) die Abschnitte AF und BG und zudem der Abschnitt FD gegeben sind, so erhält man nach den vorhergehenden Lehrsätzen die vierte Proportionale, wenn man durch D eine Parallele zu AB zieht. Diese kann aber BC nur in einem Punkte schneiden. Mithin muß auch umgekehrt, wenn (Fig. 81) AC : BC = DC : EC, oder (Fig. 82) FG $\parallel$ AB, und AF : BG = = FD : GE, die Schneidelinie DE parallel AB sein. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Wenn zwei gerade Linien durch Schneidelinien in proportionale Abschnitte getheilt werden, und ein Paar Abschnitte am Durchschnittspunkte oder zwischen zwei Parallelen liegt, so sind die Schneidelinien parallel.

V.: DE $\parallel$ AB (Fig. 82), wobei DE auch unendlich klein, d. h. ein Punkt sein kann. AF : BG = FD : GE.

Beh.: FG $\parallel$ AB.

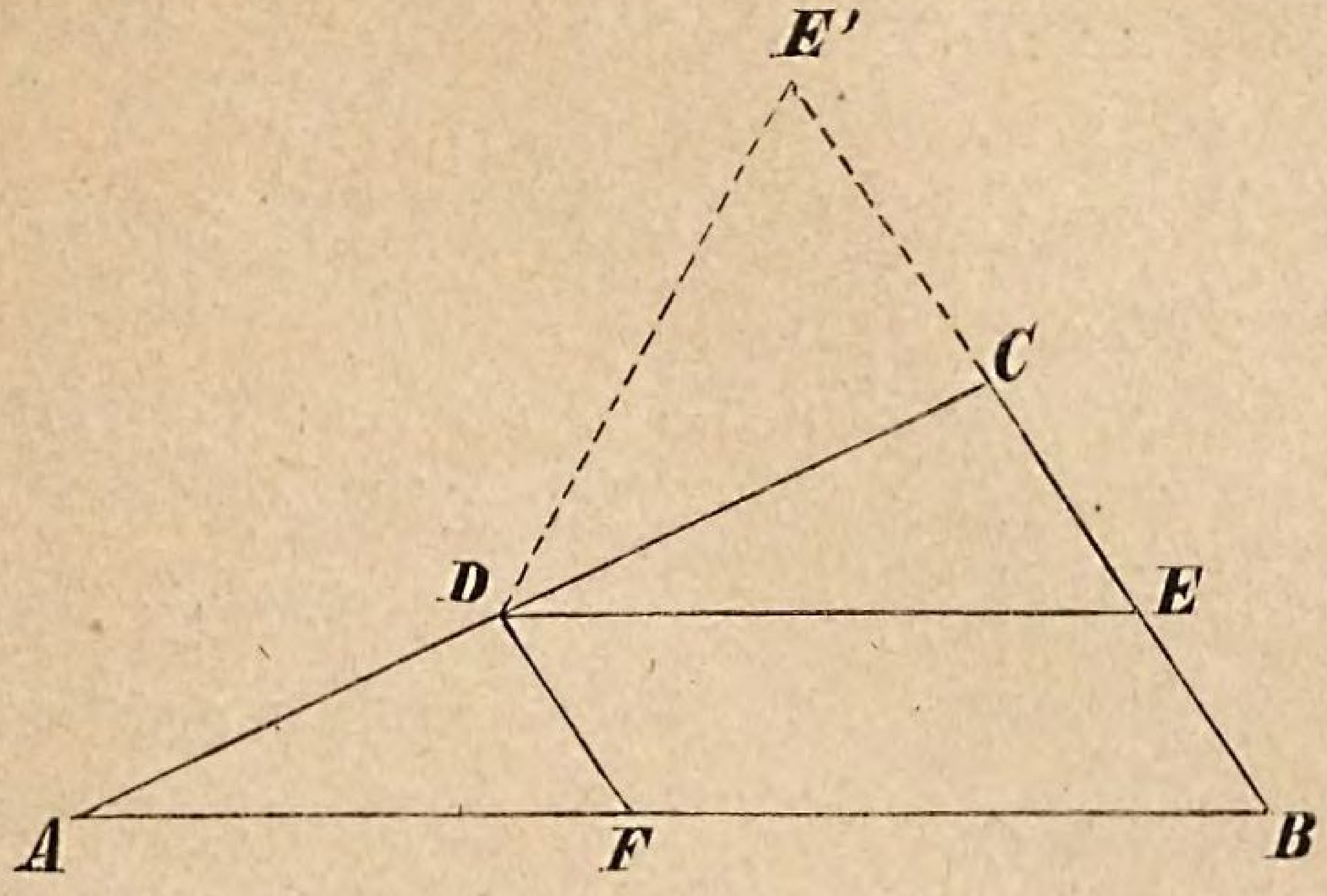
Bew.: Gesetzt nicht FG, sondern FJ $\parallel$ AB. Dann wäre
AF : BJ = FD : JE (Lehrs. 1). Es ist aber
AF : BG = FD : GE nach V. Mithin

BJ : BG = JE : GE.

Es verhielte sich also das Größere zum Kleineren wie das Kleinere zum Größeren. Der Widerspruch hebt sich nur dann, wenn die Parallele BJ durch G geht, also wenn J mit G zusammenfällt.

Um nun aber auch die Beziehung der Parallelseiten (AB und DE Fig. 81) zu untersuchen, bringen wir (Fig. 83) die Parallelstrecke DE auf AB, indem wir durch D mit CB eine Parallele DF ziehen.

Fig. 83.



Alsdann ist:

$$AB : AC = FB : DC \text{ (Lehrsatz 1)}$$
$$= DE : DC, \text{ oder}$$
$$AB : DE = AC : DC$$
$$= BC : EC.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Werden zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen durch Parallelen geschnitten, so verhalten sich die von den Strahlen begrenzten Parallelstrecken wie die Strecken, welche sie von demselben Strahl abschneiden (wie die Strahlstrecken).

Wenn DE nicht senkrecht auf BC, so gibt es einen Punkt E', so daß DE = DE'. Wenn also:

$$AB : DE = AC : DC, \text{ so ist auch}$$
$$AB : DE' = AC : DC, \text{ aber}$$
$$DE' \text{ ist nicht parallel } AB.$$

Der Lehrsatz 3 läßt sich also nicht umkehren. Wenn aber von den beiden Schneidelinien DE' und DE DE' die Parallele nicht ist, so ist die DE' gleiche DE die Parallele.

§ 53.

In Fig. 81 ist die Proportionalität der Abschnitte der von Parallelen geschnittenen Linien CA und CB unabhängig von der Größe des Winkels C, d. h. alle von C ausgehende Strahlen werden von denselben parallelen Schneidelinien in demselben Verhältniß getheilt.

Ist also (Fig. 84) DG $\#$ AF, so werden alle durch C gehende Strahlen CA, CB, CM, CK, CH, CF u. s. w. von den Parallelen AF und DG in demselben Verhältniß wie der eine Strahl CA, also in dem Verhältniß CA zu CD, getheilt, so daß ist:

CA : CD = CB : CE = CM : CN = CK : CL u. s. w.

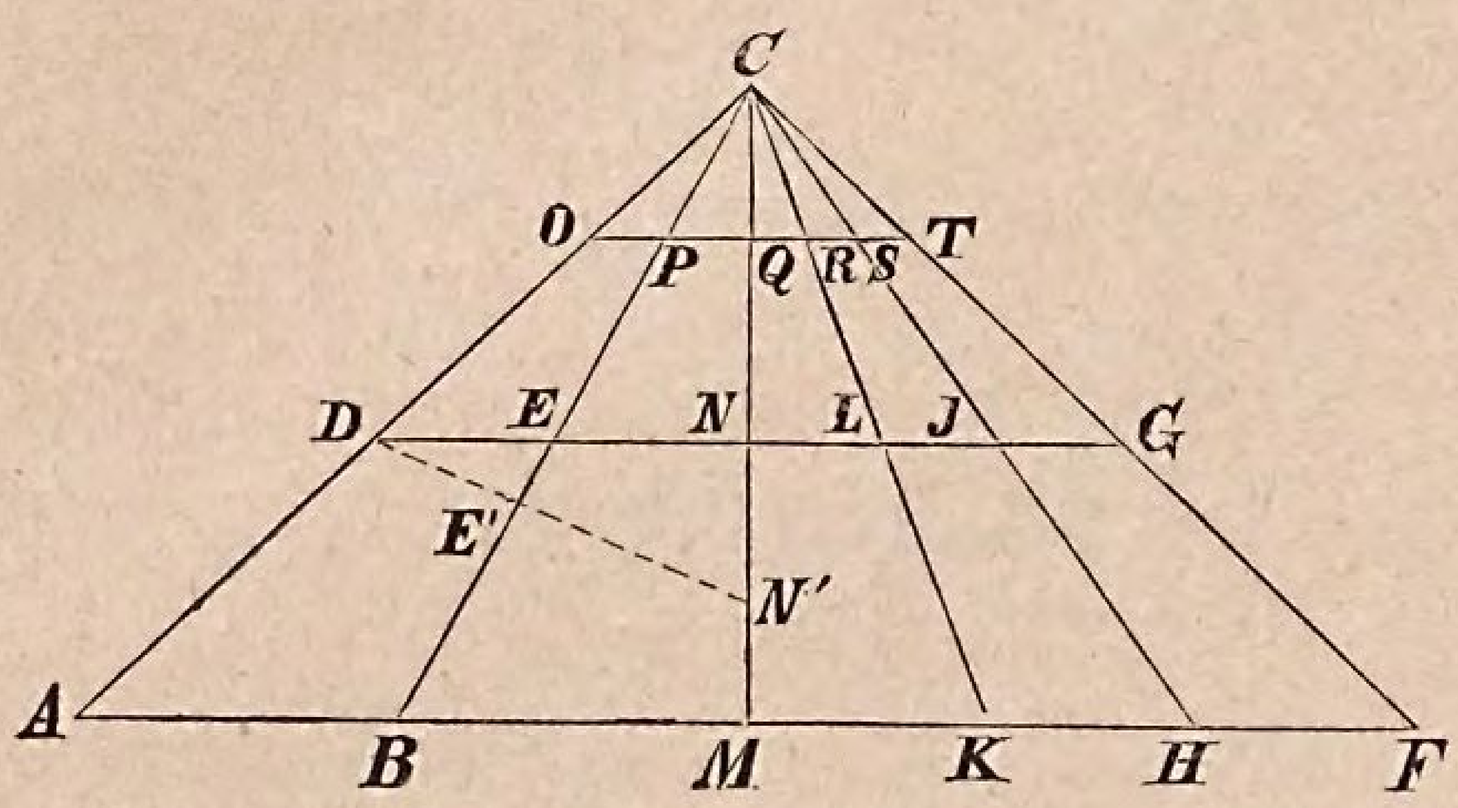
Dasselbe findet aber auch bei mehr als zwei Parallelen statt, z. B. OT ∦ DG ∦ AF:

CO : CD : CA = CP : CE : CB = CQ : CN : CM u. s. w.

Es ist aber auch:

CO : OD : DA = CP : PE : EB = CQ : QN : NM = CR : RL : LK u. s. w.

Fig. 84.



Werden aber die Strahlen selbst proportional von den Parallelen geschnitten, so werden auch diese von den Strahlen proportional getheilt, da die zwischen denselben Strahlen liegende Parallelstrecken sich (Lehrs. 3) wie die zugehörigen Strahlstrecken verhalten.

Wenn also wiederum (Fig. 84) AF ∦ DG, so ist:

AB : DE = BC : EC,
BM : EN = BC : EC.

AB : DE = BM : EN. Ferner ist:
BM : EN = MC : NC,
MK : NL = MC : NC.

BM : EN = MK : NL u. s. w.

Wir haben also:

AB : DE = BM : EN = MK : NL = KH : LJ = HF : JG,
oder AB : BM : MK : KH : HF = DE : EN : NL : LJ : JG.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Von einem Punkte ausgehende Strahlen werden durch Parallelen proportional getheilt.

2. Parallelen werden durch von einem Punkte ausgehende Strahlen proportional getheilt.

Denken wir uns durch D (Fig. 84) eine zweite Schneidelinie DN′ gezogen, die BC in E′ und MC in N′ trifft, so kann nicht DE : EN = DE′ : E′N′ sein, da sonst EE′ ∦ NN′ sein müßte. Es können also nur Parallelen durch von einem Punkte ausgehende Strahlen proportional getheilt werden. Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Werden gerade Linien durch von einem Punkte ausgehende Strahlen proportional getheilt, so sind sie parallel.

Da durch die drei Glieder AB, DE und BM der beiden Parallelen AF und DG (Fig. 84) das vierte Glied EN der Proportion AB : DE = BM : EN vollständig bestimmt ist, MN aber verlängert durch C, den Durchschnittspunkt von AD und BE, geht, so kann die Proportionalität von Parallelstrecken nur eintreten, wenn die schneidenden Linien durch einen Punkt gehen. Drehen wir etwa MC etwas um M, so daß sie AC nicht mehr in C trifft, so wird nothwendig EN größer oder kleiner. Es ist also dann nicht mehr

$$AB : DE = BM : EN.$$

Da der Durchschnittspunkt C auch in's Unendliche rücken kann (wenn AB = DE), so erhalten wir den Lehrsatz:

4. Werden Parallelen durch gerade Schneidelinien proportional getheilt, so gehen die Schneidelinien durch einen Punkt oder sind parallel.

§ 54.

Wenn man (Fig. 84) durch A und D nach links zwei neue Parallelen zieht, so ergibt sich leicht, daß die von C ausgehenden Strahlen von diesen Parallelen in demselben Verhältniß geschnitten werden, wie von den Parallelen AF und DG. Wir nennen nun bei den von C ausgehenden Strahlstrecken CD und CA, CE und CB u. s. w. homologe Strahlstrecken, ebenso die Punkte D und A, E und B u. s. w. homologe Punkte.

Fig. 85 a.

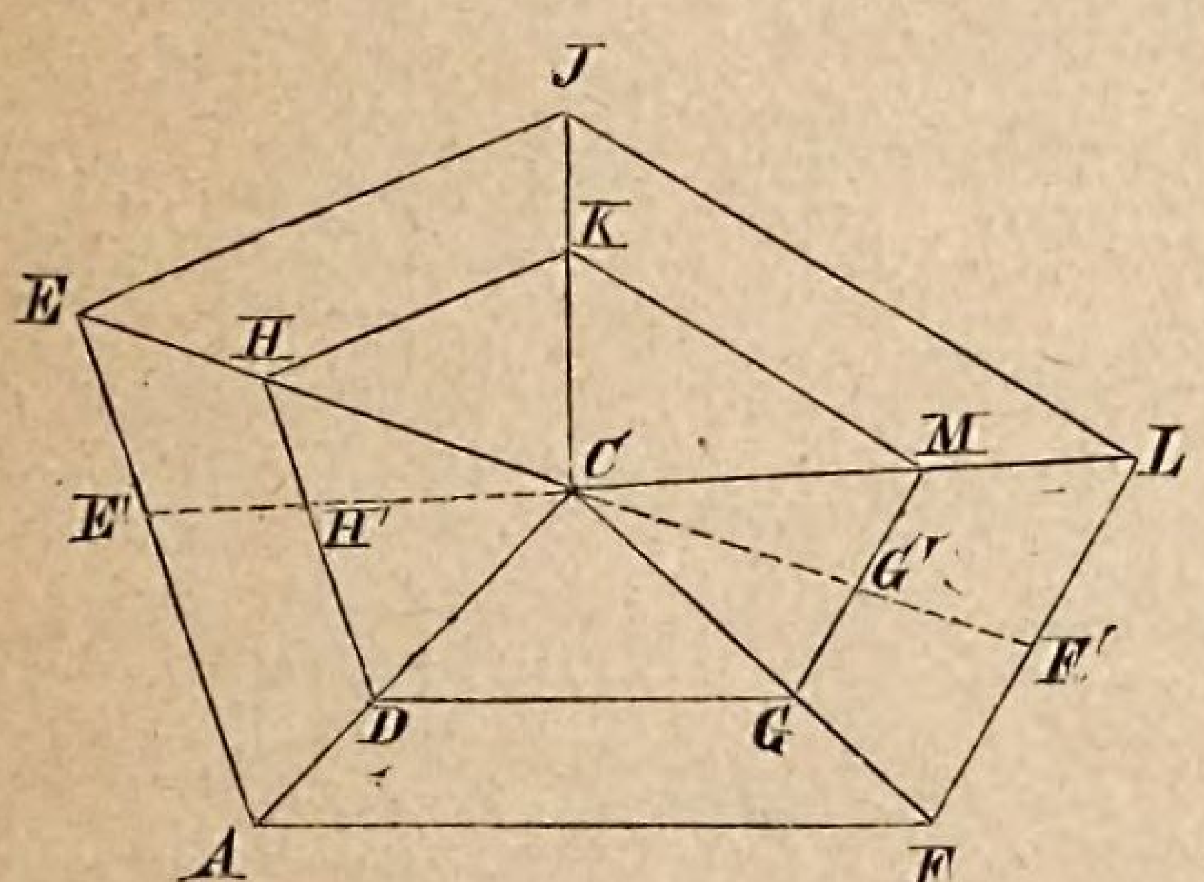
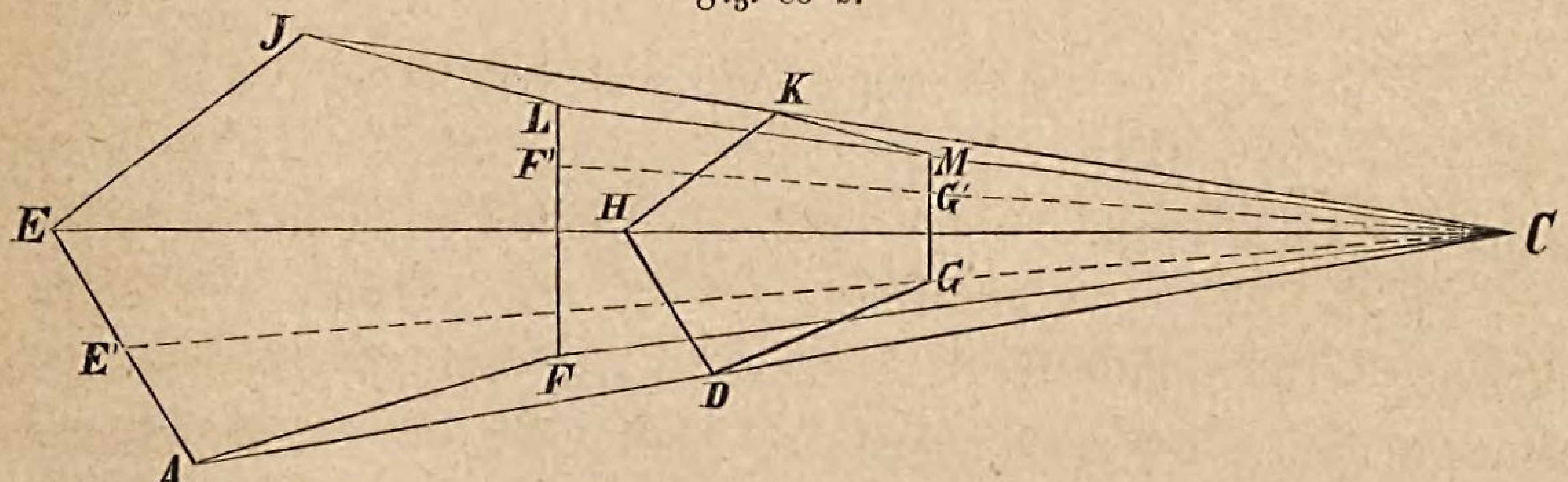
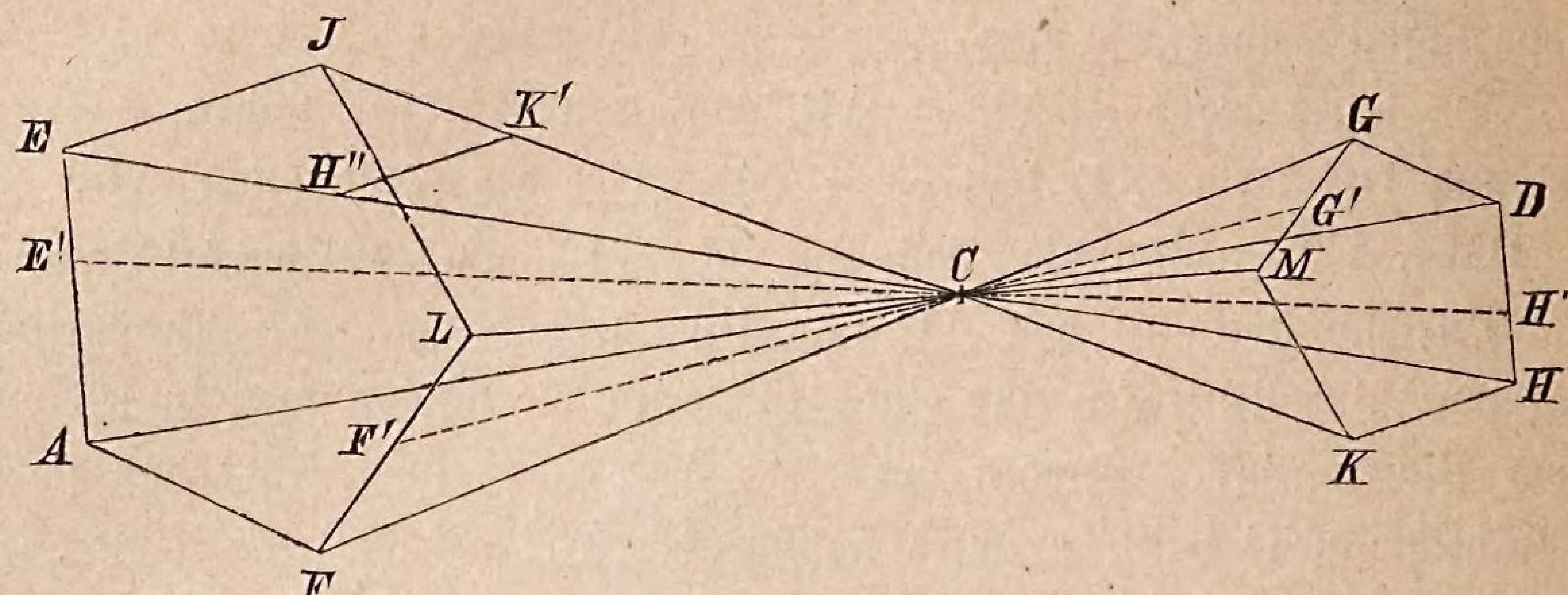


Fig. 85 b.



Wenn also (Fig. 85) AE $\#$ DH, EJ $\#$ HK, JL $\#$ KM, LF $\#$ MG, FA $\#$ GD, und A und D, E und H, J und K, L und M, F und G homologe Punkte sind, so werden die von C ausgehenden

Fig. 85 c.



Strahlen von den parallelen Seiten der Parallelvielecke AEJLF u. DHKMG in constantem Verhältniß getheilt.

Weil (Fig. 85 a u. 85 b) AE ∦ DH, ist CA : CD = CE' : CH' = CE : CH; weil EJ ∦ HK, ist CE : CH = CJ : CK; weil JL ∦ KM, so ist CJ : CK = CL : CM; weil LF ∦ MG, ist CL : CM = CF' : CG' = CF : CG. Es ist also: CA : CD = CE' : CH' = CE : CH = CJ : CK = CL : CM = CF' : CG' = CF : CG.

Wenn man (Fig. 85 c) CH'' = CH macht und H''K' parallel EJ zieht, so ist △ CKH ≅ CK'H'', folglich auch CK' = CK. Da aber CE : CH'' = CJ : CK', so ist auch CE : CH = CJ : CK. Es findet also auch in Fig. 85 c dieselbe Proportionalität statt.

CA : CD = AE : DH, CE : CH = EJ : HK u. s. w.; es verhalten sich also die homologen Strahlstrecken wie die homologen Parallelstrecken. Da aber das Verhältniß der homologen Strahlstrecken constant ist, so ist auch das Verhältniß der homologen Parallelstrecken constant.

Die Seiten der beiden Vielecke AEJLF und DHKMG sind also proportional. Zudem ist ∢ AEJ = DHK, ∢ EJL = HKM u. s. w. als Parallelwinkel (Fig. 85 a und 85 b) oder als Antiparallelwinkel (Fig. 85 c).

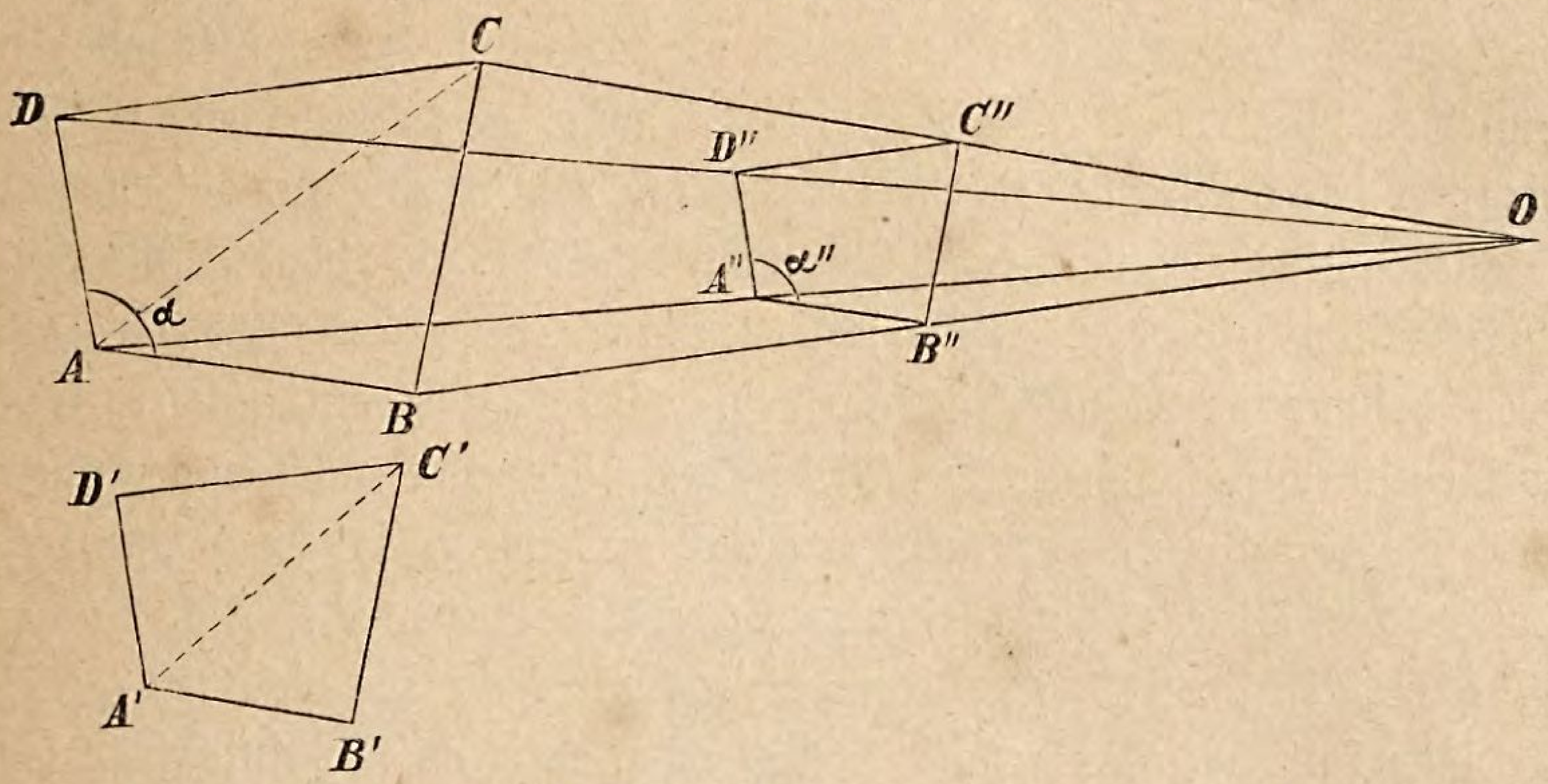
Die beiden Figuren sind also nach § 51 ähnlich.

Der Punkt C (Fig. 85) heißt Ähnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Parallelvielecke. Wir erhalten nun durch eine leichte Betrachtung den Lehrsatz:

1. Sind die von demselben Punkte ausgehenden Strahlen in constantem Verhältnisse getheilt, so ist das Vieleck, welches von den geraden Verbindungslinien der aufeinander folgenden Punkte der einen Punktreihe gebildet wird, dem Vielecke ähnlich, welches durch die geraden Verbindungslinien der homologen Punkte entsteht.

Untersuchen wir nun, ob auch umgekehrt zwei ähnliche Vielecke sich

Fig. 86.



immer in die Lage bringen lassen, daß die entsprechenden Ecken homologe Punkte desselben Strahlenbüschels sind.

Es sei (Fig. 86) Vieleck ABCD ∾ A'B'C'D'. Wir bringen nun A'B'C'D' in die Lage A''B''C''D'', und zwar so, daß A''D'' ∦ AD, verbinden die entsprechenden Ecken A und A'' und D und D'' durch gerade Linien, die sich in O schneiden. Da nun aber $\alpha'' = \alpha$, so muß auch A''B'' ∦ AB sein. Es ist aber auch AD : A''D'' = AB : A''B'', und da AD : A''D'' = AO : A''O, so ist auch AB : A''B'' = AO : A''O. Folglich muß BB'' durch O gehen. Aus denselben Gründen müssen DD'' und CC'' durch O gehen. Ferner ergibt sich AO : A''O = DO : D''O = CO : C''O = BO : B''O. Die von O ausgehenden Strahlen sind also von den ähnlichen Vielecken in constantem Verhältniß und zwar in dem Verhältniß der entsprechenden Vielecksseiten getheilt.

Wir erhalten also:

2. Aehnliche Vielecke lassen sich in solche Lagen bringen, daß die von demselben Punkte ausgehenden Strahlen von den Umfängen der Vielecke proportional geschnitten werden. Nach 1 und 2 sind mithin folgende Definitionen von ähnlichen geradlinigen Figuren gleichbedeutend:

a) Zwei geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in den Winkeln und die entsprechenden Seiten proportional sind.

b) Figuren sind ähnlich, wenn sie sich in eine solche Lage bringen lassen, daß die von demselben Punkte ausgehenden Strahlen von den Umfängen der Vielecke proportional getheilt werden.

Die Definition b) ist die allgemeine, indem sie anwendbar ist auf geradlinige und krummlinige Figuren und auf Gebilde im Raume.

Von einem Ähnlichkeitspunkte erscheinen die entsprechenden Seiten der ähnlichen Parallelvielecke (Fig. 85 von C, Fig. 86 von O aus) unter demselben Winkel; z. B. BC und B″C″ unter dem Winkel BOC. Denken wir uns das Vieleck A″B″C″D″ (Fig. 86) so verschoben, daß die Seiten parallel mit ihrer ursprünglichen Lage bleiben, so bleiben die Vielecke ähnliche Parallelvielecke. Für jede bestimmte Lage derselben aber gibt es einen bestimmten Ähnlichkeitspunkt O. Derselbe ist ein innerer, wenn je zwei entsprechende Punkte der Vielecke von demselben nach entgegengesetzten Seiten (Fig. 85 c), dagegen ein äußerer, wenn je zwei entsprechende Punkte der Vielecke auf derselben Seite desselben liegen (Fig. 85 a und 85 b und Fig. 86). Der Ähnlichkeitspunkt kann für dieselben zwei Vielecke innerhalb oder außerhalb beider, in einer gemeinschaftlichen Ecke oder auf einer Seite liegen.

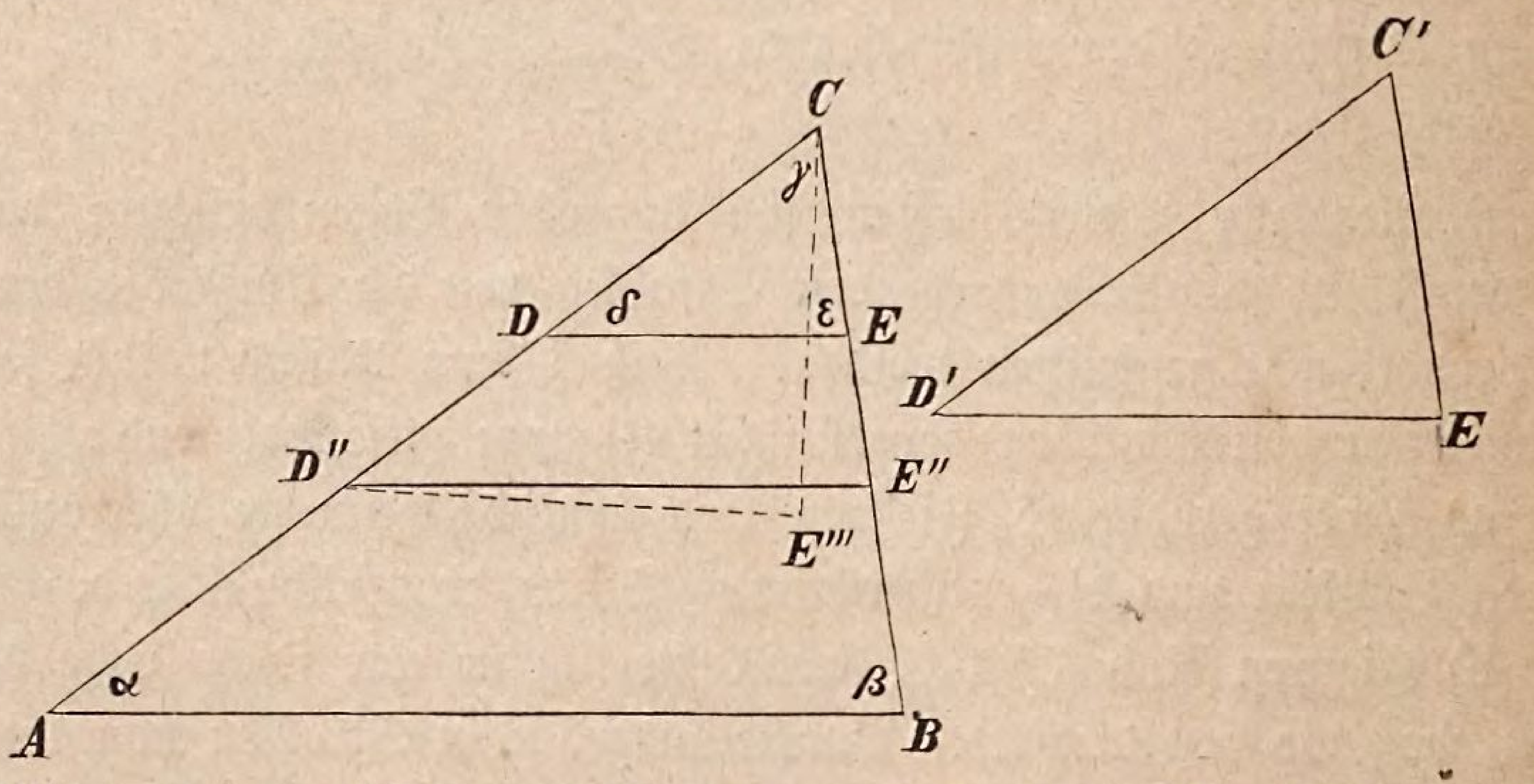
Lehrsätze über die Aehnlichkeit, Größenbeziehungen der Dreiecks- und Viereckseiten.

Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke.

§ 55.

Wenn in dem Dreiecke ABC (Fig. 87) die Seite AB parallel mit sich selbst, d. h. ohne ihre Richtung zu ändern, verschoben wird, etwa bis DE, so daß also DE $\mathrel{\#}$ AB, so ist CA : CB = CD : CE, mithin

Fig. 87.



△ CED ∾ △ ABC nach Definition 2. § 54. Hier fällt der Aehnlichkeitspunkt C mit der Dreiecksecke C, und die homologen Strahlen CD und CA, sowie CE und CB mit Dreiecksseiten zusammen.

Wenn die Dreiecke ABC und D'E'C' Paralleldreiecke sind, d. h. Dreiecke, deren Seiten parallel sind, und man verschiebt das Dreieck D'E'C' ohne die Richtungen seiner Seiten zu verschieben, bis C' in C fällt, so nimmt es die Lage CD''E'' ein, wobei also D''E'' ∦ AB, also auch △ CD''E'' ∾ △ ABC ∾ △ DEC.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Paralleldreiecke sind ähnlich.

Sehen wir nun zu, welchen Bedingungen ein Dreieck genügen muß, um Paralleldreieck eines gegebenen Dreiecks werden zu können, d. h. unter welchen Bedingungen ein Dreieck zu einem gegebenen Dreiecke in dieselbe Lage gebracht werden kann, die △ D''CE'' zu △ ABC einnimmt, so daß D''E'' ∦ AB. Es ist aber △ D''CE'', wenn man von der absoluten Größe der Seiten absieht, bestimmt durch 1) 2 Winkel, 2) einen Winkel γ und das Verhältniß D''C : E''C. — Wenn der Winkel γ bei unveränderten einschließenden Seiten größer oder kleiner wird, so wird auch die gegenüberliegende Seite größer oder kleiner (§ 28, 5). Das Verhältniß von AB zu D''E''' kann also auch nicht gleich dem von AB : D''E'', also auch nicht gleich AB : D''C sein. Proportionalität aller Seiten kann also nur bei einer Lage wie △ D''CE'' zu △ ABC vorkommen. Die Form des Dreiecks D''CE'' ist also auch durch das Verhältniß der drei Seiten bestimmt. Dieselbe ist aber auch schließlich noch bestimmt durch das Verhältniß DC : EC, ∢ δ und durch die Bestimmung, ob ∢ ε stumpf oder spitz. — Zu demselben Ergebniß kommen wir durch Vergleichung der Aehnlichkeit mit der Congruenz. Diese geht in jene über, wenn an die Stelle der Uebereinstimmung in den Seiten die Proportionalität der Seiten tritt, d. h. die Seiten dürfen größer oder kleiner werden, aber alle in demselben Verhältnisse. Wir erhalten daher die Lehrsätze 2, 3, 4 und 5.

2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in zwei Winkeln (vergl. § 26, 1 und 2), (Fig. 88).

V. $\alpha = \delta$.
$\beta = \varepsilon$.

Beh. △ ABC ∾ DEF.

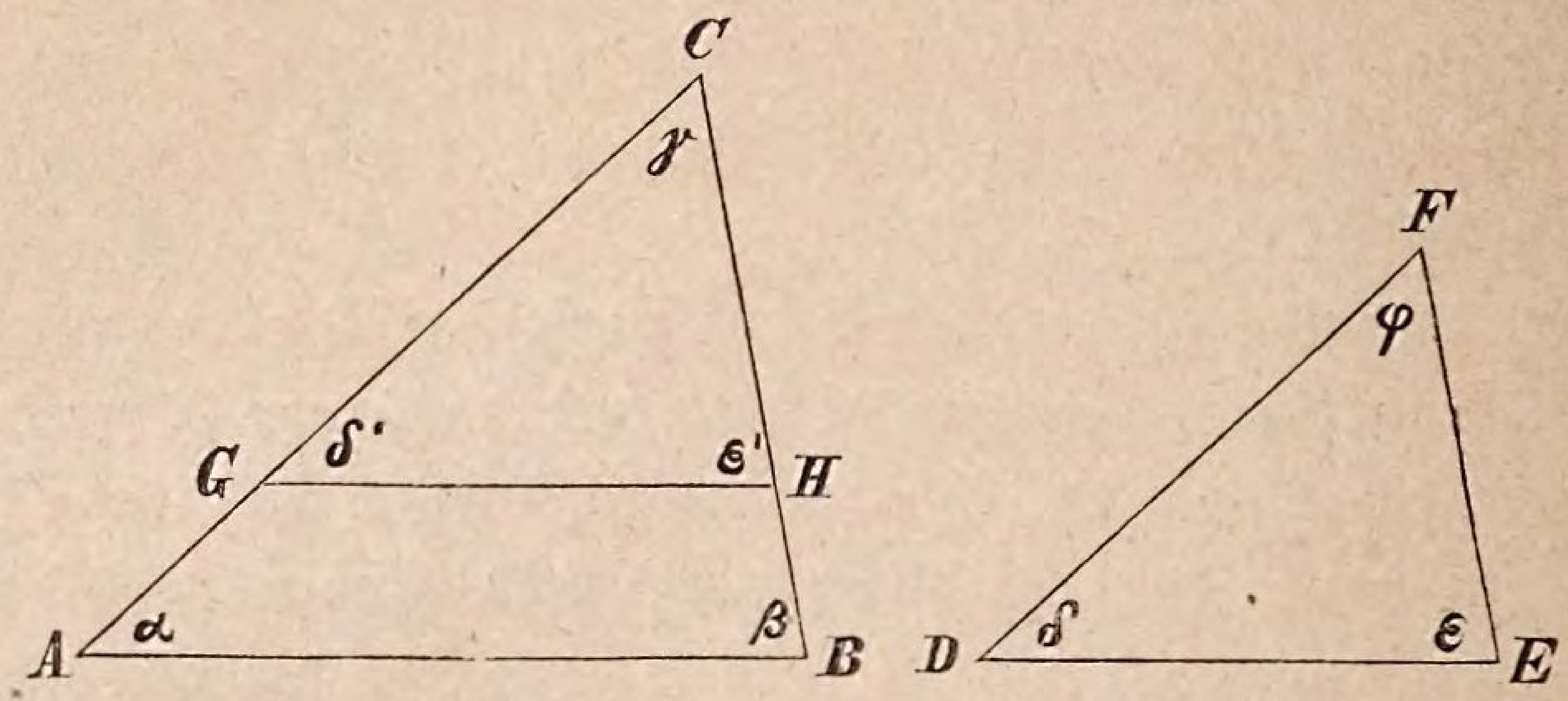
Bew. Da $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$, so ist auch $\gamma = \varphi$. Macht man nun CG = DF und CH = EF, so ist △ GHC ≅ DEF. Mithin $\delta' = \delta = \alpha$ und $\varepsilon' = \varepsilon = \beta$. Ist aber $\delta' = \alpha$, so ist GH ∦ AB. Mithin:

$$\triangle\ GHC \sim ABC\ (\text{Lehrs. 1}).$$

Mithin ist auch:

$$\triangle\ DEF \sim ABC.$$

Fig. 88.



3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenpaare proportional und die eingeschlossenen Winkel gleich (vergl. § 26, 3) (Fig. 88).

V. $CA : CB = FD : FE$,

$$\gamma = \varphi.$$

Beh. $\triangle\ ABC \sim DEF$.

Bew. Ich mache $CG = FD$, $CH = FE$. Alsdann ist, da $\gamma = \varphi$,

$$\triangle\ GHC \cong DEF.$$

Es ist aber nach V. $CA : CB = FD : FE$

$= GC : CH$ n. Constr. Mithin:

$\triangle\ GHC \sim ABC$ (Definition 2, § 54),

also auch $\triangle\ DEF \sim ABC$.

4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten proportional (vergl. § 26, 5), (Fig. 88).

V. $AB : BC : CA = DE : EF : FD$.

Bh. $\triangle\ ABC \sim DEF$.

Bew. Ich mache $CG = FD$ und $CH = FE$. Da nach V.

$AC : BC = FD : FE$, so ist auch:

$AC : BC = CG : CH$. Mithin:

$\triangle\ ABC \sim GHC$. Es ist aber:

$AB : BC = DE : EF$ n. V. Es ist aber auch:

$AB : BC = GH : HC$, weil $GH \parallel AB$.

Diese beiden Proportionen stimmen, da $HC = EF$, in drei homologen Gliedern überein. Mithin $DE = GH$. Folglich stimmen die Dreiecke GHC und DEF in drei Seiten überein; daher:

$\triangle$ GHC $\cong$ DEF,
$\triangle$ GHC $\sim$ ABC.

$\triangle$ DEF $\sim$ ABC.

5. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Paar Seiten proportional, ein von denselben nicht eingeschlossenes Winkelpaar gleich, und das andere nicht eingeschlossene Winkelpaar gleichartig (vergl. § 26, 4), (Fig. 88).

V. AC : BC = DF : EF,
$\sphericalangle\ \alpha = \delta$,
$\sphericalangle\ \beta$ gleichartig ε.

Bh. $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

Bew. Ich mache CG = DF und CH = EF. Da nun
AC : BC = DF : EF, so ist auch:
AC : BC = GC : HC. Mithin:

$\triangle$ GHC $\sim$ ABC.

Da nun $\delta' = \alpha = \delta$, und $\varepsilon' = \beta = \varepsilon$, so ist $\triangle$ GEC $\cong$ DEF (§ 26, 4), also auch $\triangle$ ABC $\sim$ DEF.

Lehrsätze über Aehnlichkeit der Parallelogramme.

§ 56.

Parallelogramme sind Doppeldreiecke von bestimmter Lage. Sie sind daher ähnlich, wenn die dreieckigen Hälften ähnlich sind. Es ergeben sich mithin folgende Sätze:

1. Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und die einschließenden Seiten proportional sind.

2. Rechtecke sind ähnlich, wenn zwei aufeinander folgende Seiten des einen zweien aufeinander folgenden Seiten des andern proportional sind.

3. Quadrate sind immer ähnlich.

Lehrsätze über die Größenbeziehungen der Dreiecks- und Vierecksseiten.

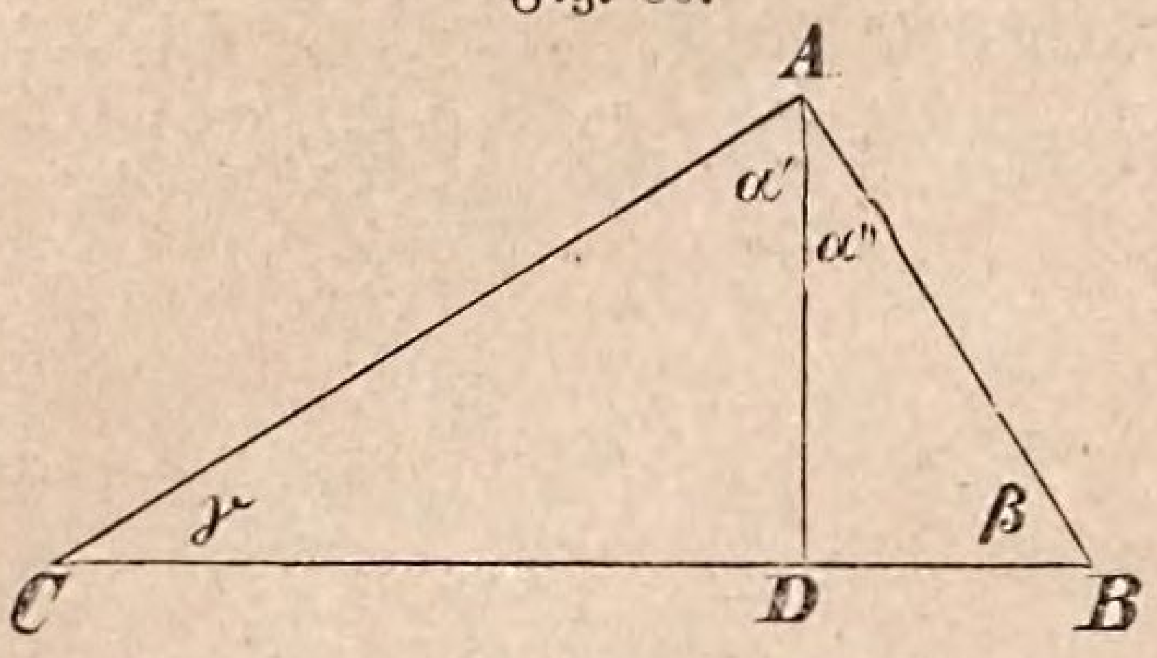
§ 57.

Wann sind rechtwinklige Dreiecke, wann sind gleichschenklige Dreiecke ähnlich?

In ähnlichen Dreiecken sind diejenigen Seiten homolog, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, und diejenigen Winkel gleich, welche homologen Seiten gegenüberliegen.

Da rechtwinklige Dreiecke selbstverständlich immer in dem rechten Winkel übereinstimmen, so sind sie nach 2 ähnlich, wenn sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen. Solche Dreiecke entstehen, wenn man im rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenusenhöhe zieht.

Fig. 89.



Zieht man (Fig. 89) in dem bei A rechtwinkligen Dreiecke ABC h_a, so ist △ ADC ∾ ABC, da sie den spitzen Winkel γ gemeinschaftlich haben. Ebenso ist △ ADB ∾ CAB.

Aus dieser Aehnlichkeit ergibt sich die Proportion:

$$AB : DB = CB : AB. \text{ Mithin:}$$
$$AB^2 = CB \cdot DB \text{ (§ 49, 4).}$$

$\alpha' + \alpha'' = R$; aber auch $\alpha' + \gamma = R$. Mithin ist $\alpha'' = \gamma$. Ebenso ergibt sich $\alpha' = \beta$. Folglich △ ADB ∾ CDA, welches sich auch daraus ergibt, daß beide dem Dreiecke ABC ähnlich sind. Aus dieser Aehnlichkeit der beiden kleinen Dreiecke ergibt sich die Proportion:

$$AD : DB = DC : AD. \text{ Mithin:}$$
$$AD^2 = DB \cdot DC.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Das Quadrat über der Hypotenusenhöhe ist gleich dem Rechtecke zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

§ 58.

Während im rechtwinkligen Dreiecke durch die Hypotenusenhöhe, also schon durch eine Höhe, ähnliche Dreiecke gebildet werden, entstehen solche im gewöhnlichen Dreiecke erst durch zwei Höhen.

Fig. 90.

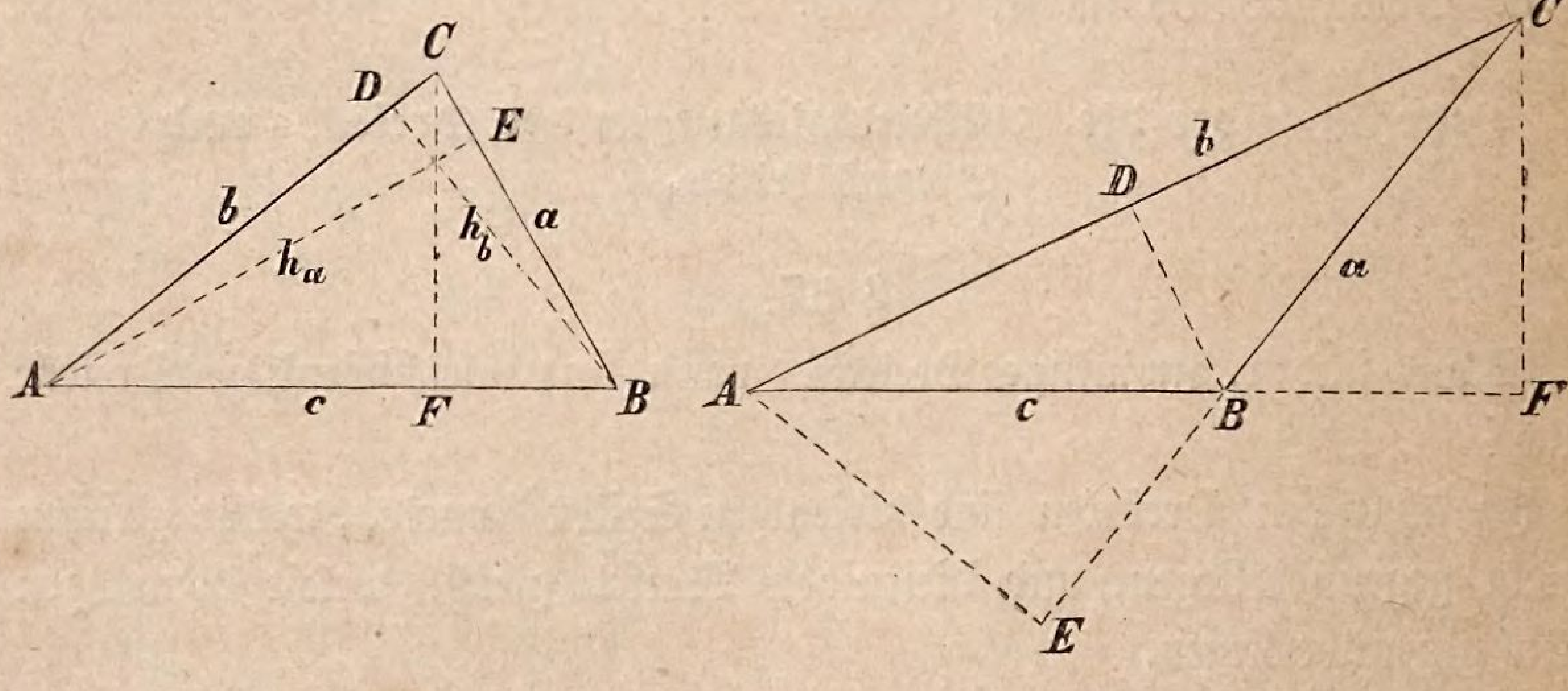


Fig. 90 ist $\triangle$ AEC $\sim$ BDC, da es rechtwinklige Dreiecke mit dem gemeinschaftlichen spitzen Winkel γ sind. Mithin ist:

$$a : b = DC : EC, \text{ oder}$$

$$a : b = {}^aP_b : {}^bP_a. \text{ Daraus folgt:}$$

$$1)\ a \cdot {}^bP_a = b \cdot {}^aP_b. \text{ Ebenso ergibt sich:}$$

$$2)\ c \cdot {}^bP_c = b \cdot {}^cP_b.$$

Aber auch, da $\triangle$ ABE $\sim$ CBF,

$$3)\ a \cdot {}^cP_a = c \cdot {}^aP_c.$$

Nach § 49, 2 ist (Fig. 90), was sich auch durch Addition von 1) und 2) ergibt,

$$b^2 = a \cdot {}^bP_a + c \cdot {}^bP_c.$$

Nun ist aber $\quad {}^bP_a = a \mp {}^cP_a$, und

$${}^bP_c = c \mp {}^aP_c. \text{ Mithin:}$$

$$b^2 = a\,(a \mp {}^cP_a) + c\,(c \mp {}^aP_c), \text{ oder}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 \mp a \cdot {}^cP_a \mp c \cdot {}^aP_c$$

$$= a^2 + c^2 \mp 2 \cdot c\,{}^aP_c, \text{ da } a \cdot {}^cP_a = c \cdot {}^aP_c,$$

$$= a^2 + c^2 \mp 2 \cdot a\,{}^cP_a.$$

Das obere Zeichen (—) ist zu nehmen, wenn b, wie in der Figur links, die Gegenseite eines spitzen Winkels ist; dagegen ist das Zeichen + zu nehmen, wenn b die Gegenseite eines stumpfen Winkels ist.

Aus § 49, 2 ergeben sich also folgende Lehrsätze:

1. In einem Dreiecke ist das Quadrat über der Gegenseite eines spitzen Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Rechteck zwischen einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese.

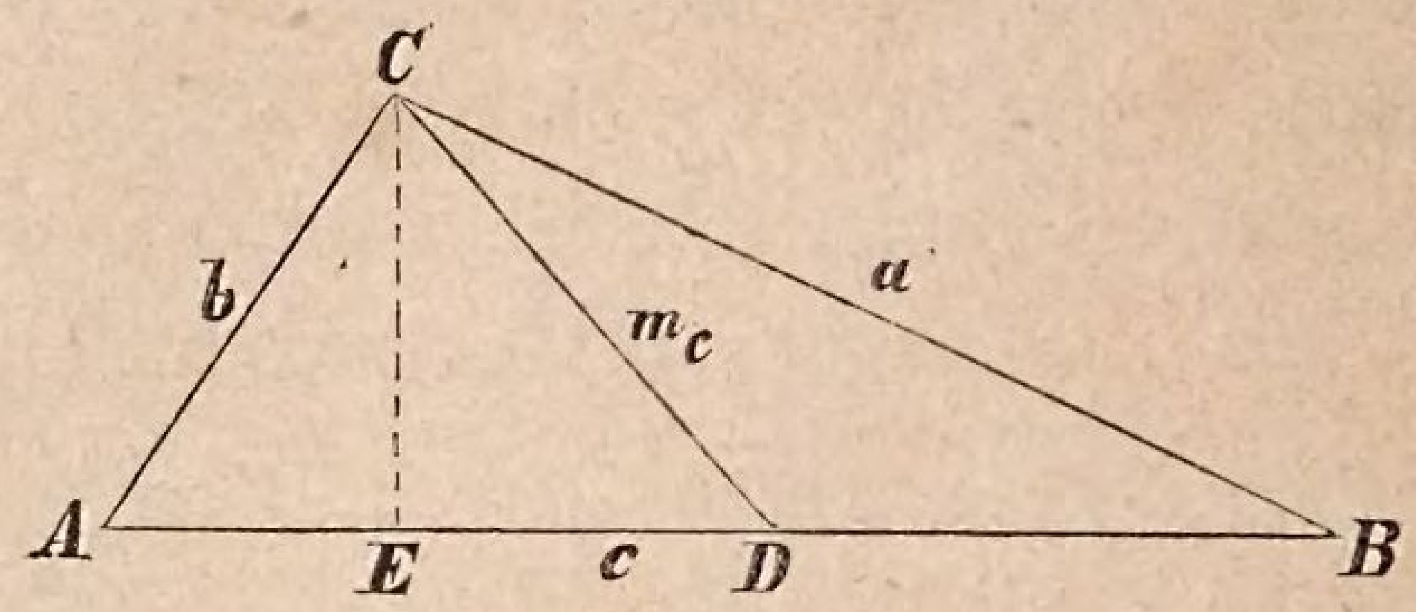
2. In einem Dreiecke ist das Quadrat über der Gegenseite eines stumpfen Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck zwischen einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese.

§ 59.

Wenn zwei Dreiecke in den Seiten a und c übereinstimmen, die eingeschlossenen Winkel aber supplementar sind, so ist $c \cdot {}^aP_c$ für beide dasselbe; dagegen ist das doppelte Rechteck für das Quadrat der einen Gegenseite abzuziehen, für das andere zu addiren. Solche Dreiecke erhalten wir, wenn wir in einem Dreiecke ABC (Fig. 91) eine Mittellinie ziehen.

Es sei (Fig. 91) AD = DB = $\frac{c}{2}$. Alsdann ist in dem Dreiecke ACD:

Fig. 91.



$$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot DE \text{ (§58, Lehrs. 1). Dagegen:}$$

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot DE \text{ (§ 58, Lehrs. 2). Mithin:}$$

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2m_c^2$$

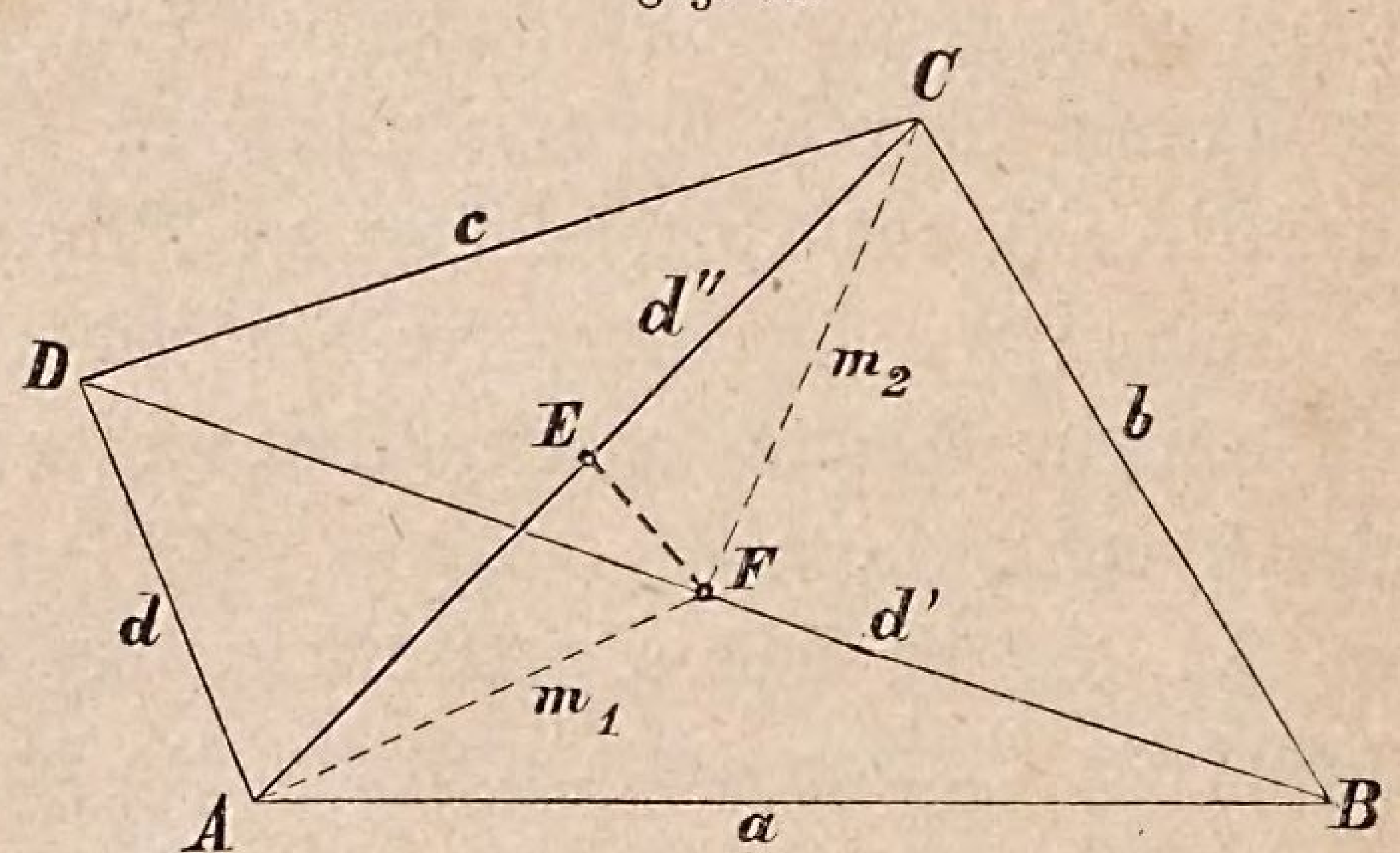
$$= \frac{1}{2}c^2 + 2m_c^2.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. In jedem Dreiecke ist die Summe der Quadrate über zwei Seiten gleich dem halben Quadrate über der dritten Seite vermehrt um das doppelte Quadrat über der Mittellinie dieser Seite.

Wenden wir 1 auf das Viereck an.

Fig. 92.



Es sei (Fig. 92) AC = d'', BD = d', BF = FD, AE = EC, FE = e, AF = m_1, CF = m_2. Alsdann ist:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + d^2 &= \tfrac{1}{2}d'^2 + 2\,m_1^2 \\ b^2 + c^2 &= \tfrac{1}{2}d'^2 + 2\,m_2^2 \end{aligned}\right\} \text{ n. Lehrs. 1.}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d'^2 + 2\,(m_1^2 + m_2^2).$$

Es ist aber: $m_1^2 + m_2^2 = \frac{1}{2}d''^2 + 2e^2$ (Lehrs. 1).

Mithin: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d''^2 + d'^2 + 4e^2$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Die Summe der Quadrate über den vier Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen vermehrt um das vierfache Quadrat über der geraden Verbindungslinie der Halbirungspunkte der Diagonalen.

Wenn das Viereck ein Parallelogramm ist, so fallen die Halbirungspunkte der Diagonalen zusammen, oder $e = o$. Beim Parallelogramme ist also:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d''^2 + d'^2.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

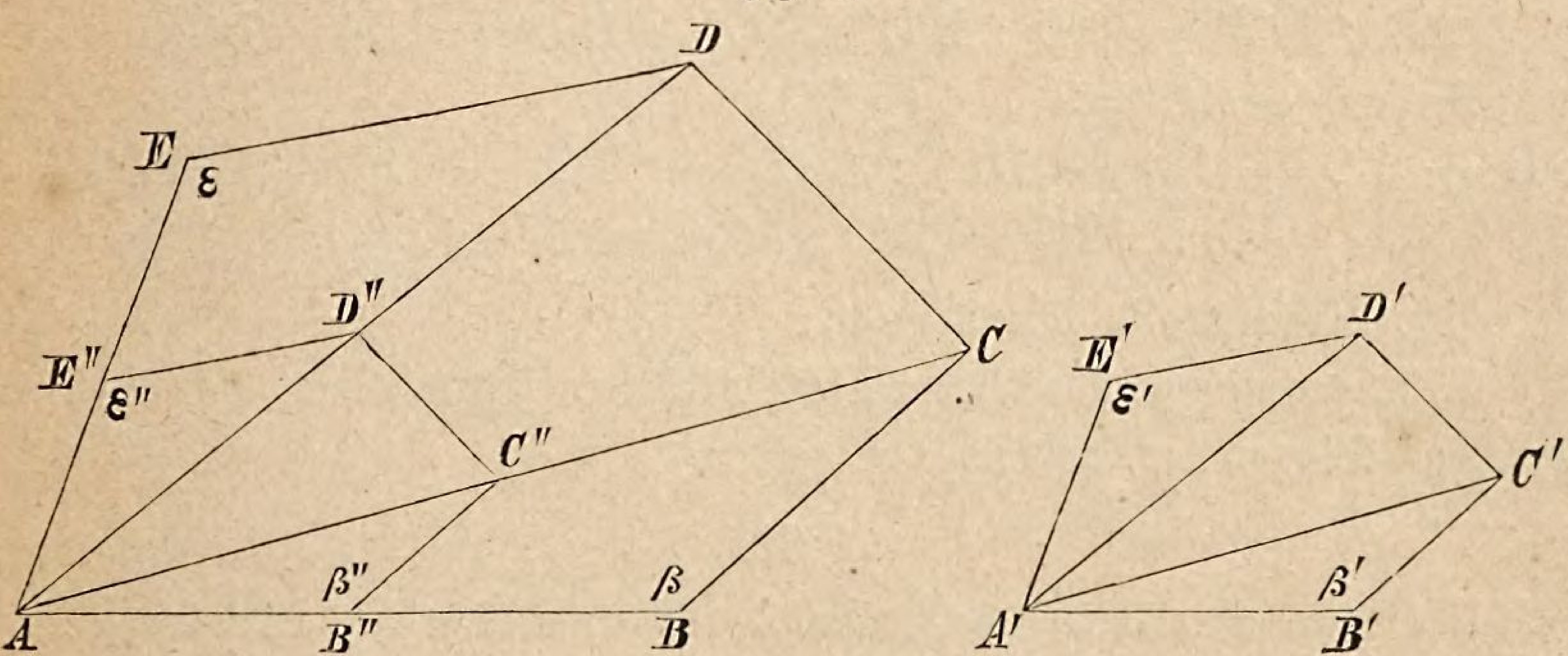
3. Die Summe der Quadrate über den vier Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

Lehrsätze über ähnliche Vielecke.

§ 60.

Sind zwei Vielecke ABCDE und A′B′C′D′E′ (Fig. 93) einander ähnlich, so kann man sie so aufeinander legen, daß die entsprechenden Winkel α und α', da sie gleich sind, sich decken.

Fig. 93.



Die neue Lage von A′B′C′D′E′ ist AB″C″D″E″. Da aber $\beta'' = \beta' = \beta$, so ist $B''C'' \parallel BC$. Da ferner n. V. $AB : BC = A'B' : B'C'$, so ist auch:

$$AB : BC = AB'' : B''C''.$$

Mithin muß, da $B''C'' \parallel BC$, die Ecke C″ in der Diagonale AC liegen. Ebenso ergibt sich, daß D″ in AD liegt. Es ergibt sich nun, daß △ AB″C″, also auch △ A′B′C′ ∼ ABC, △ AC″D″, also

auch $\triangle$ A'C'D' $\sim$ ACD, $\triangle$ AD"E", also auch $\triangle$ A'D'E' $\sim$ ADE, sowie Viereck AB"C"D", also auch Viereck A'B'C'D' $\sim$ ABCD.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Aehnliche Vielecke werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Figuren getheilt.

Aus Fig. 93 ersieht man leicht, daß, wenn

$$\triangle\ A'B'C' \sim ABC,$$
$$\triangle\ A'C'D' \sim ACD,$$
$$\triangle\ A'D'E' \sim ADE,$$

sich Vieleck A'B'C'D'E' so auf ABCDE legen läßt, daß es die Lage AB"C"D"E" erhält, welches Vieleck ähnlich ABCDE.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Vielecke sind ähnlich, wenn sie aus ähnlichen Figuren in derselben Anordnung zusammengesetzt sind.

§ 61.

Da alle homologen Seiten ähnlicher Vielecke dasselbe Verhältniß haben, so werden auch die Umfänge oder die Summen der homologen Seiten dasselbe haben.

Es ist (Fig. 86):

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'.$$

Mithin (§ 42, 2):

$$(AB + BC + CD + DA) : (A'B' + B'C' + C'D' + D'A') =$$
$$AB : A'B' = AC : A'C' = AO : A''O.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie homologe Seiten, homologe Diagonalen, homologe Strahlen.

§ 62.

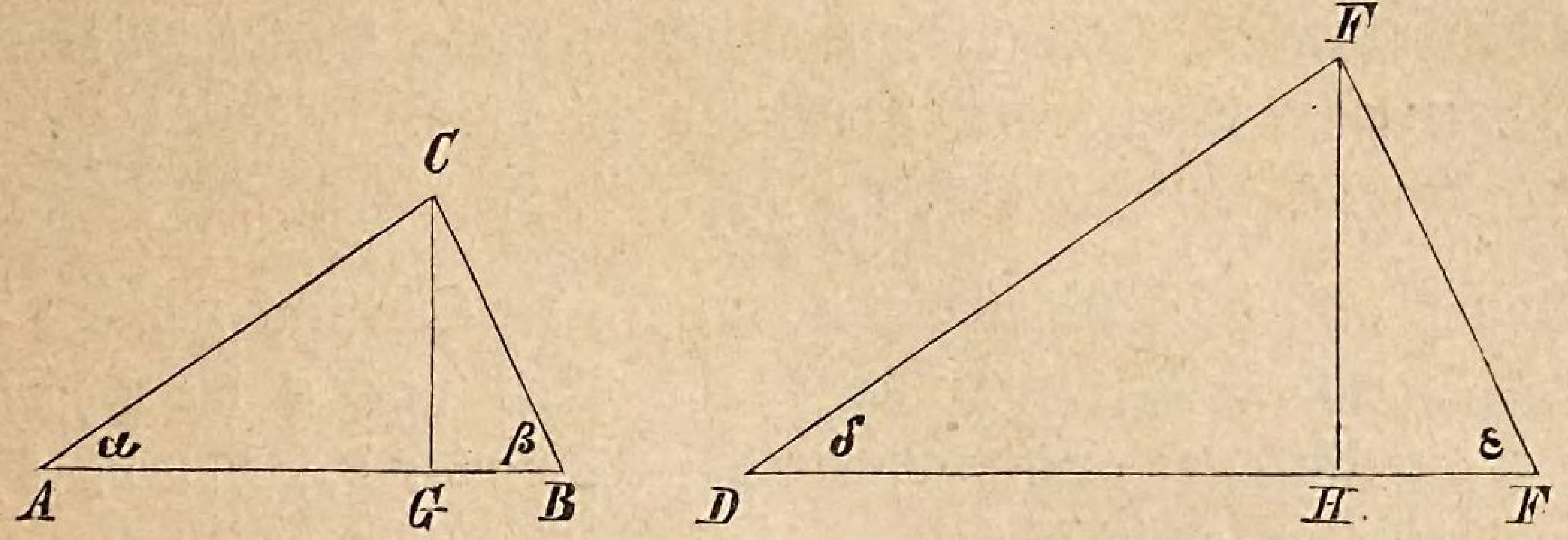
Um nun aber auch die Inhaltsverhältnisse ähnlicher Vielecke zu erhalten, müssen wir auf ähnliche Dreiecke zurückgehen.

In Fig. 94 ist aber $\triangle$ ABC $\sim$ DEF, CG $\perp$ AB, FH $\perp$ DE.

Da in den beiden Dreiecken die Winkel α und δ einander gleich sind, so können wir $\triangle$ DEF so aus $\triangle$ ABC entstanden denken, daß AB und AC in dem Verhältniß von AB zu DE wachsen.

Alsdann ist aber (§ 46, 1) der Inhalt im Verhältniß von AB·AC zu DE·DF oder im Verhältniß von AB^2 zu DE^2 gestiegen. Es ergibt sich dasselbe auch auf folgende Weise:

Fig. 94.



Da nach der Vorauss. $\alpha = \delta$, so ist das rechtwinklige Dreieck AGC $\sim$ DHF, und da $\beta = \varepsilon$ n. V., so ist $\triangle$ BCG $\sim$ EFH.

Mithin ist:

$$CG : FH = AC : DF$$
$$= AB : DE.$$

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Aehnliche Dreiecke werden durch homologe Höhen in ähnliche Dreiecke getheilt.

2. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich homologe Höhen wie homologe Seiten.

Nun ist aber (§ 45, 3):

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB \cdot CG}{DE \cdot FH}$$
$$= \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}$$
$$= \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$$
$$= \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Denken wir uns nun in den Vielecken der Fig. 86 von A und A′ die Diagonalen gezogen, so ist:

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2,$$
$$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = CD^2 : C'D'^2 = AB^2 : A'B'^2.$$

$$(\triangle ABC + \triangle ACD) : (\triangle A'B'C' + \triangle A'C'D') = AB^2 : A'B'^2;$$

mithin:

$$ABCD : A'B'C'D' = AB^2 : A'B'^2 = AC^2 : A'C'^2 = AO^2 : A''O^2.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Aehnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten, homologer Diagonalen, homologer Strahlen.

§ 63.

Nach § 62, 4 ist bei ähnlichen Vielecken der Quotient zwischen Vieleck und homologem Seitenquadrat constant. Sind nun a die Hypotenuse, b und c die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, P_a, P_b, P_c ähnliche Vielecke über a, b, c, so ist:

$$P_a : a^2 = P_b : b^2,$$
$$P_a : a^2 = P_c : c^2.$$

$$P_a : a^2 = (P_b + P_c) : (b^2 + c^2) \text{ u. } \S\ 42,\ 2.$$

Nun ist $a^2 = b^2 + c^2$, mithin auch $P_a = P_b + P_c$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Sind die Hypotenuse und die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks homologe Seiten von ähnlichen Vielecken, so ist das Vieleck über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Vielecke über den Katheten.

Lehrs. 1 läßt sich, wie leicht zu beweisen, auch umkehren. Wir erhalten also den Lehrsatz:

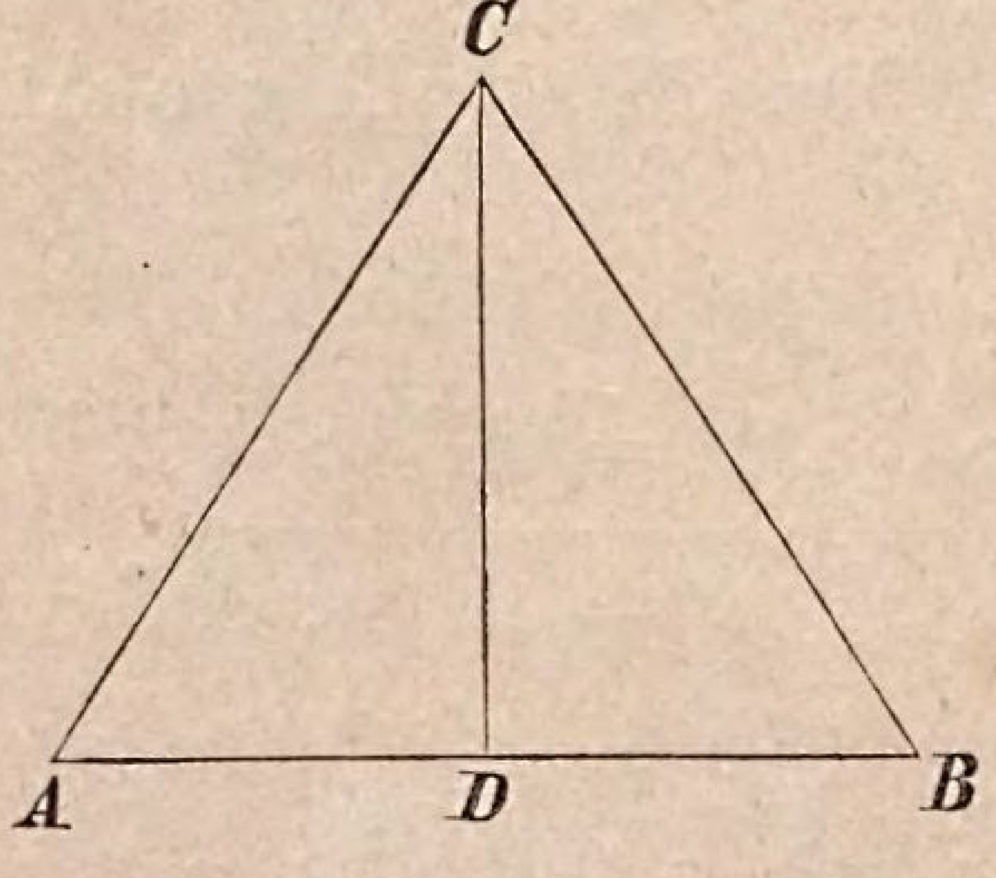
2. Sind über den Seiten eines Dreiecks ähnliche Vielecke beschrieben, und ist das eine derselben gleich der Summe der beiden anderen, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Ueber Transversalen im Dreiecke.

§ 64.

Was ist der Fall, wenn man die Spitze C (Fig. 95) mit dem Halbirungspunkte D der Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks ABC verbindet, in Bezug auf die beiden kleinen Dreiecke und die Winkel bei D und C?

Fig. 95.



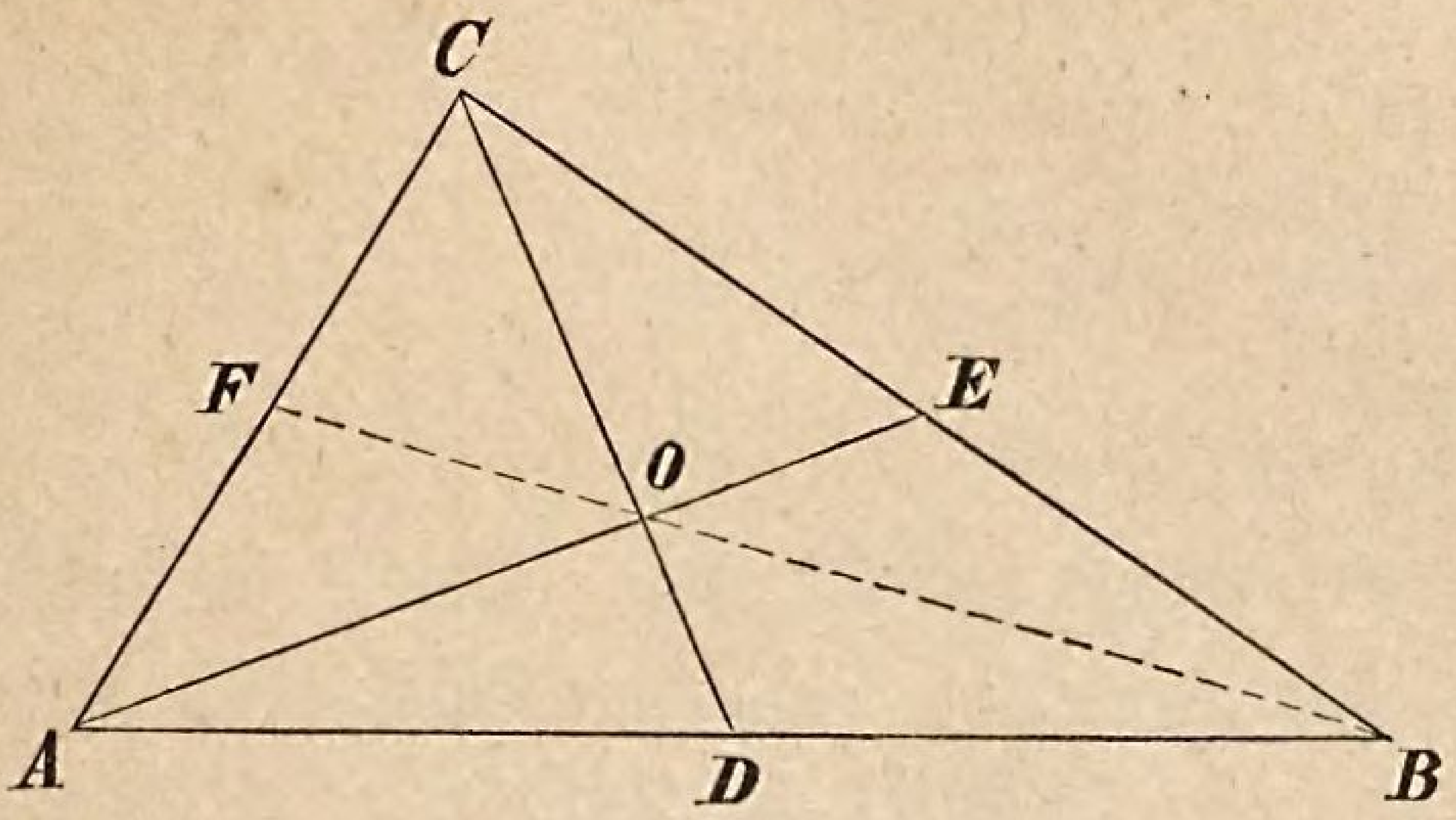
Was ist der Fall, wenn man 1) im gleichschenkligen Dreiecke ABC von der Spitze C auf die Grundlinie AB eine Senkrechte fällt, 2) in der Mitte der Grundlinie eine Senkrechte errichtet, 3) den Winkel an der Spitze halbirt?

Was ist der Fall, wenn man im gleichseitigen Dreiecke 1) jede Ecke mit der Mitte

der gegenüberliegenden Seite verbindet, 2) von jeder Ecke auf die gegenüberliegende Seite eine Senkrechte fällt, 3) in der Mitte jeder Seite eine Senkrechte errichtet, 4) jeden Winkel halbirt?

Untersuchen wir die Beziehungen der Mittellinien eines beliebigen Dreiecks. Es sei (Fig. 96) AD = DB, BE = EC.

Fig. 96.



Alsdann ist △ AEB = AEC, weil sie gleiche Grundlinien BE und EC und dieselbe zugehörige Höhe haben. Aus demselben Grunde ist

△ OEB = OEC und mithin auch
△ AOB = AOC.
Da aber auch △ ADC = BDC und
△ AOD = BOD, so ist auch:

△ AOC = BOC, also auch:
△ AOB = BOC.

Diese beiden Dreiecke aber stimmen in der Grundlinie OB überein. Daher müssen sie, da sie gleich sind, auch in der Höhe übereinstimmen. Verlängern wir nun OB bis F, so haben die Dreiecke FBA und FBC die Grundlinie FB gemeinschaftlich und dieselben Höhen wie die Dreiecke AOB und BOC. Folglich stimmen sie überein in Grundlinie und Höhe, sind also gleich. Sie haben aber auch, wenn wir AF und FC zu Grundlinien nehmen, dieselbe Höhe; mithin sind ihre Grundlinien AF und FC einander gleich. Die verlängerte BO halbirt also AC. Die drei Mittellinien AE, BF und CD oder m_a, m_b und m_c schneiden sich also in einem Punkte O.

Da die Strecke AB in D halbirt ist, so liegt der Schwerpunkt von AB in D und von jeder mit AB parallelen und von den Dreiecksseiten begrenzten Strecke in CD. Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt also in CD. Aus demselben Grunde liegt er auch in AE, mithin liegt er in O.

O ist also der Schwerpunkt des Dreiecks. Deßhalb heißen die Mittellinien auch Schwerpunktstransversalen.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Die Mittellinien oder Schwerpunktstransversalen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

In Fig. 96 ist:

$$\triangle\ AOD = DOB = \frac{1}{2}\ AOB;$$

$$\triangle\ AOF = FOC = \frac{1}{2}\ AOC;$$

$$\triangle\ BOE = EOC = \frac{1}{2}\ BOC.$$

Da aber $\triangle$ AOB = AOC = BOC, so sind die sechs von den Mittellinien gebildeten Dreiecke einander gleich. Es ist mithin:

$\triangle$ AOC = 2AOD. Es ist aber:

$\triangle$ AOC : $\triangle$ AOD = CO : OD. Mithin:

2 : 1 = CO : OD. Folglich:

CO = 2OD. Ebenso ergibt sich:

AO = 2OE,

BO = 2OF. Mithin ist:

$CO = \frac{2}{3}\,CD$, $OD = \frac{1}{3}\,CD$. u. s. w.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Die Mittellinien eines Dreiecks theilen das Dreieck in sechs gleiche Dreiecke und theilen sich selbst gegenseitig so, daß zwischen dem Schwerpunkte und der Ecke $\frac{2}{3}$, und zwischen Schwerpunkt und Seitenmitte $\frac{1}{3}$ der Mittellinie liegt.

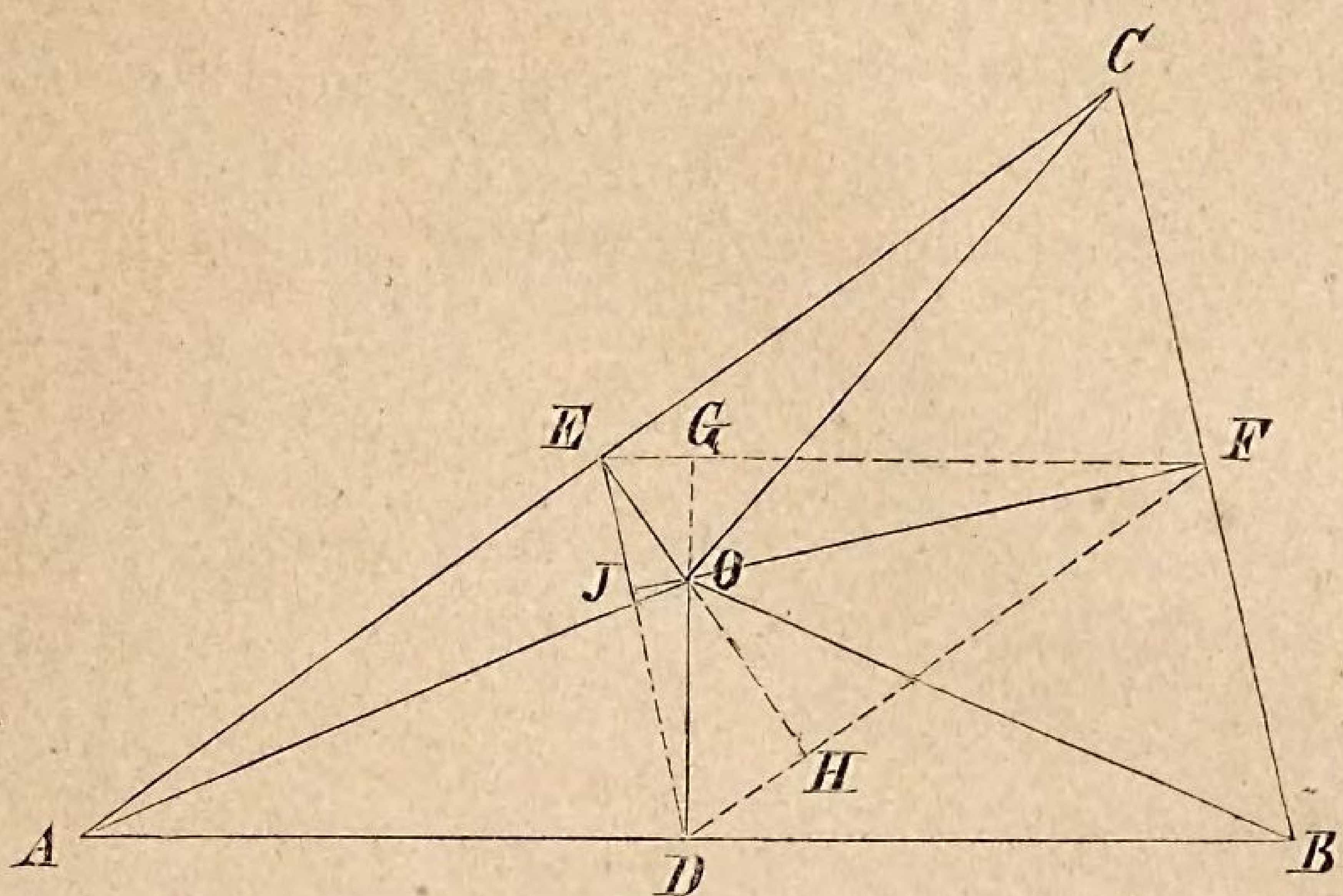
Untersuchen wir nun die Seiten-Halbirungssenkrechten.

Es sei (Fig. 97) AD = DB, AE = EC und DO $\perp$ AB, EO $\perp$ AC. Da AD = DB, so ist jeder Punkt von DO gleich weit von A und B entfernt, also AO = BO; und da AE = EC, so ist AO = CO. Es ist also AO = BO = OC. Da also $\triangle$ BCO gleichschenklig, so geht die Senkrechte in der Mitte von BC durch die Spitze O. Die drei Seitenhalbirungssenkrechten gehen also durch denselben Punkt O.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Die Seitenhalbirungssenkrechten schneiden sich in einem Punkte, welcher von den drei Ecken gleiche Entfernung hat.

Fig. 97.



Wenn man (Fig. 97) die drei Seitenhalbirungspunkte D, E, F durch gerade Linien verbindet, so ist

$$AD : DB = AE : EC;$$
$$AD : DB = CF : FB;$$
$$AE : EC = BF : FC;$$

mithin:

$$DE \# BC,$$
$$DF \# AC,$$
$$EF \# AB.$$

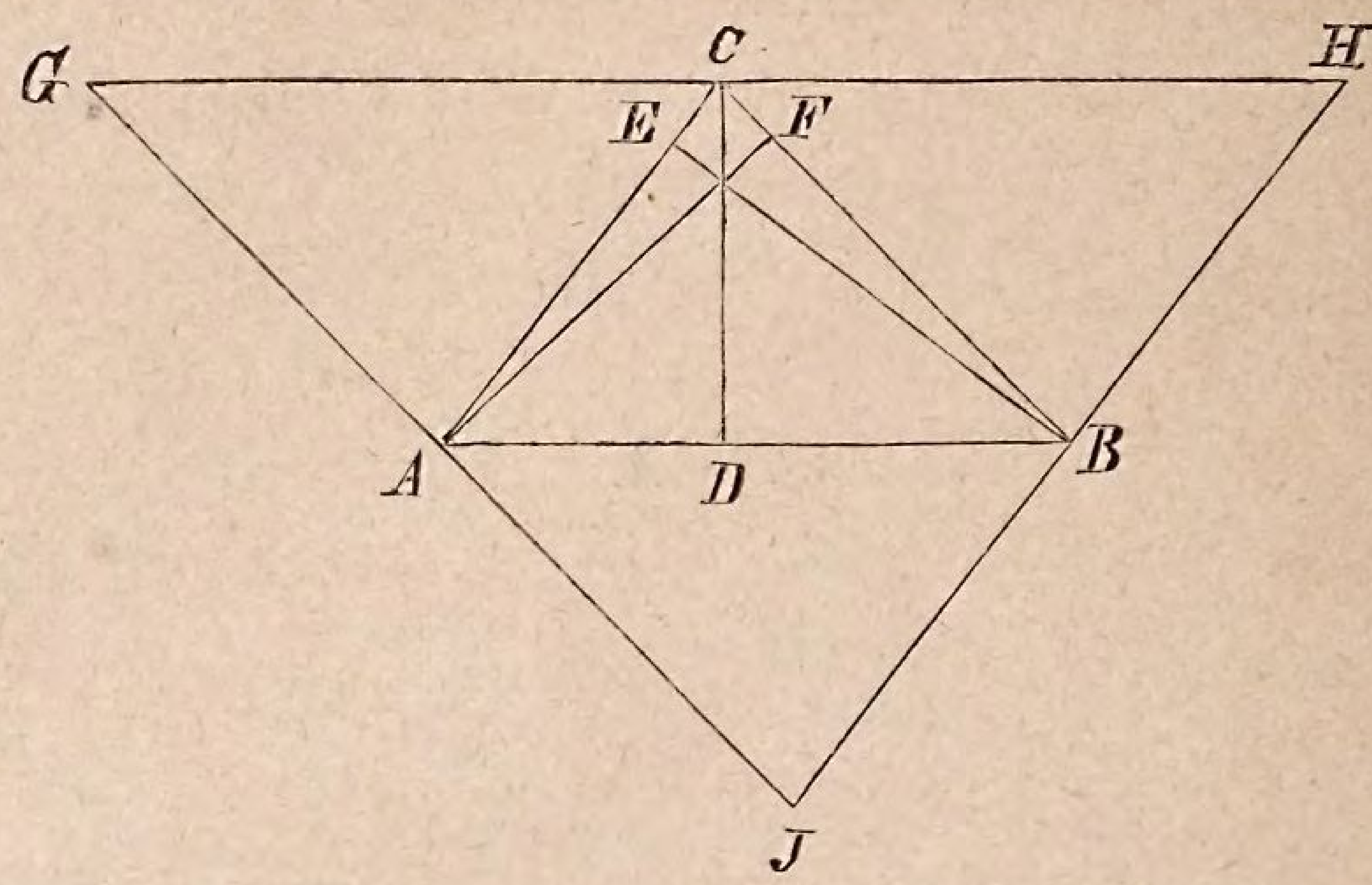
Da aber $AB : EF = AC : EC$
$$= 2 : 1,$$
so ist $AB = 2EF$. Ebenso ergibt sich $BC = 2ED$, $AC = 2DF$. OD, OE, OF stehen auf den Seiten des Dreiecks ABC senkrecht, mithin auch auf den Seiten des Paralleldreiecks DEF.

Es ist also $DG \perp EF$, $EH \perp DF$, $FJ \perp DE$.

DG, EH und FJ sind also die drei Höhen des Dreiecks DEF und schneiden sich in demselben Punkte O. Da die Seiten von $\triangle$ DEF die Hälfte von den Seiten des Dreiecks ABC, so kann man jedes Dreieck in eine Lage bringen, in welcher seine Seiten die Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Seiten eines anderen Dreiecks sind. Es seien (Fig. 98) CD, BE und AF die Höhen vom $\triangle$ ABC. Durch die Ecken A, B und C ziehen wir mit den gegenüberliegenden Seiten die Parallelen GH, GJ und JH. Alsdann ist $AB \# GH$, $AC \# JH$, $BC \# JG$, und mithin:

$$CH = AB = CG,$$
$$BH = AC = BJ,$$
$$AJ = BC = AG.$$

Fig. 98.



A, B und C sind also die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks GHJ. Zudem ist CD $\perp$ GH, AF $\perp$ GJ und BE $\perp$ AC. Mithin gehen (Lehrs. 3) CD, BE und AF durch einen Punkt.

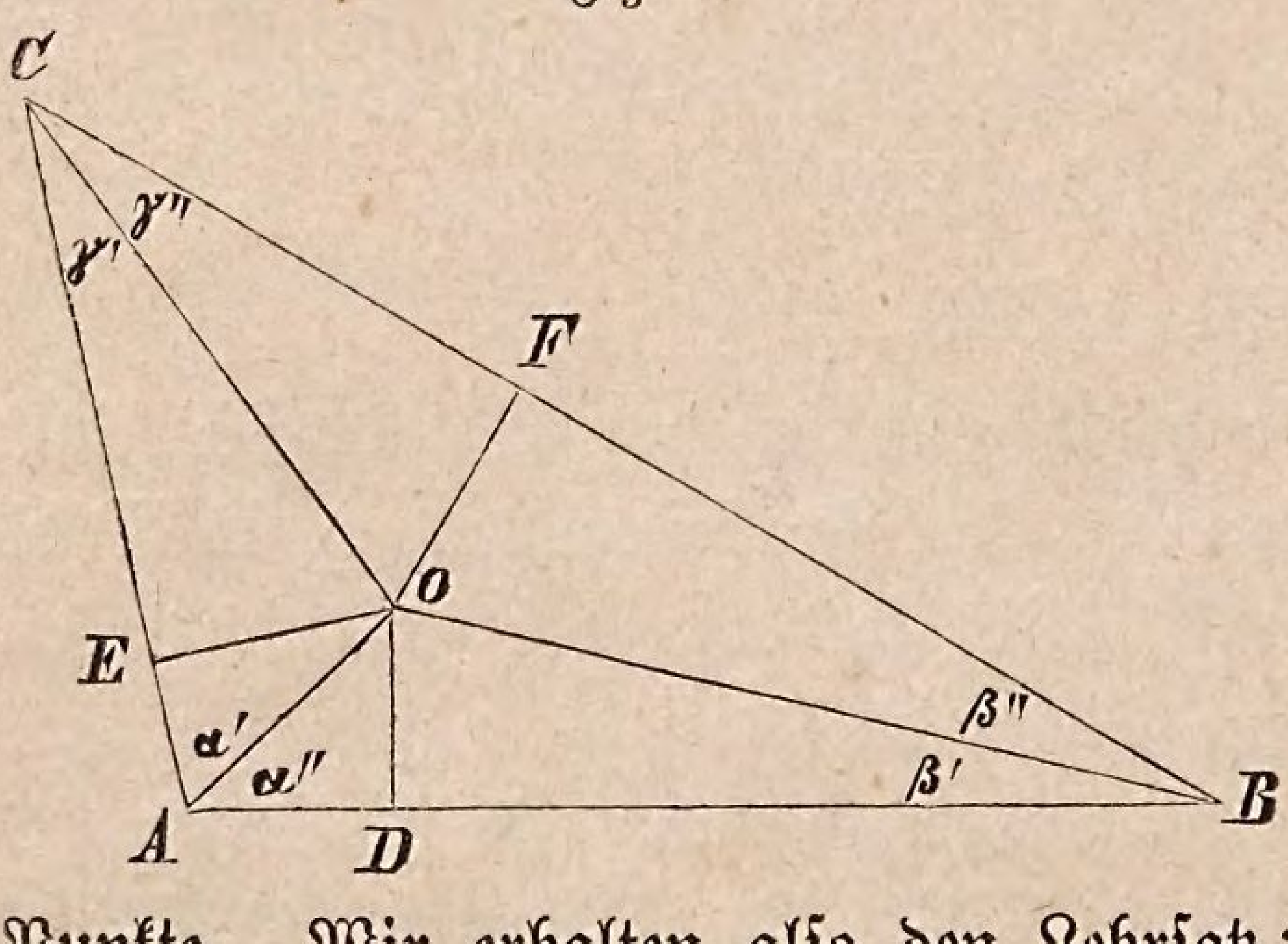
Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Untersuchen wir nun die Medialen oder Winkelhalbirungslinien.

Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist von den beiden Schenkeln gleich weit entfernt. Mithin ist, wenn (Fig. 99) $\gamma' = \gamma''$ und $\alpha' = \alpha''$, der Punkt O als Punkt der Medialen CO gleich weit von AC und BC, und als Punkt der Medialen AO gleich weit von AC und AB, mithin gleich weit von allen drei Seiten des Dreiecks entfernt.

Fig. 99.



Es sind also die Senkrechten OE, OD, OF einander gleich.

Ist aber OD = OF, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ODB und OFB congruent und mithin $\beta' = \beta''$, d. h. OB halbirt den Winkel β. Es geht also μ_β durch den Durchschnittspunkt von μ_α und μ_γ, d. h. die drei Medialen schneiden sich in einem Punkte. Wir erhalten also den Lehrsatz:

5. Die Medialen oder Winkelhalbirungslinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, welcher Punkt von den Dreiecksseiten gleiche Entfernung hat.

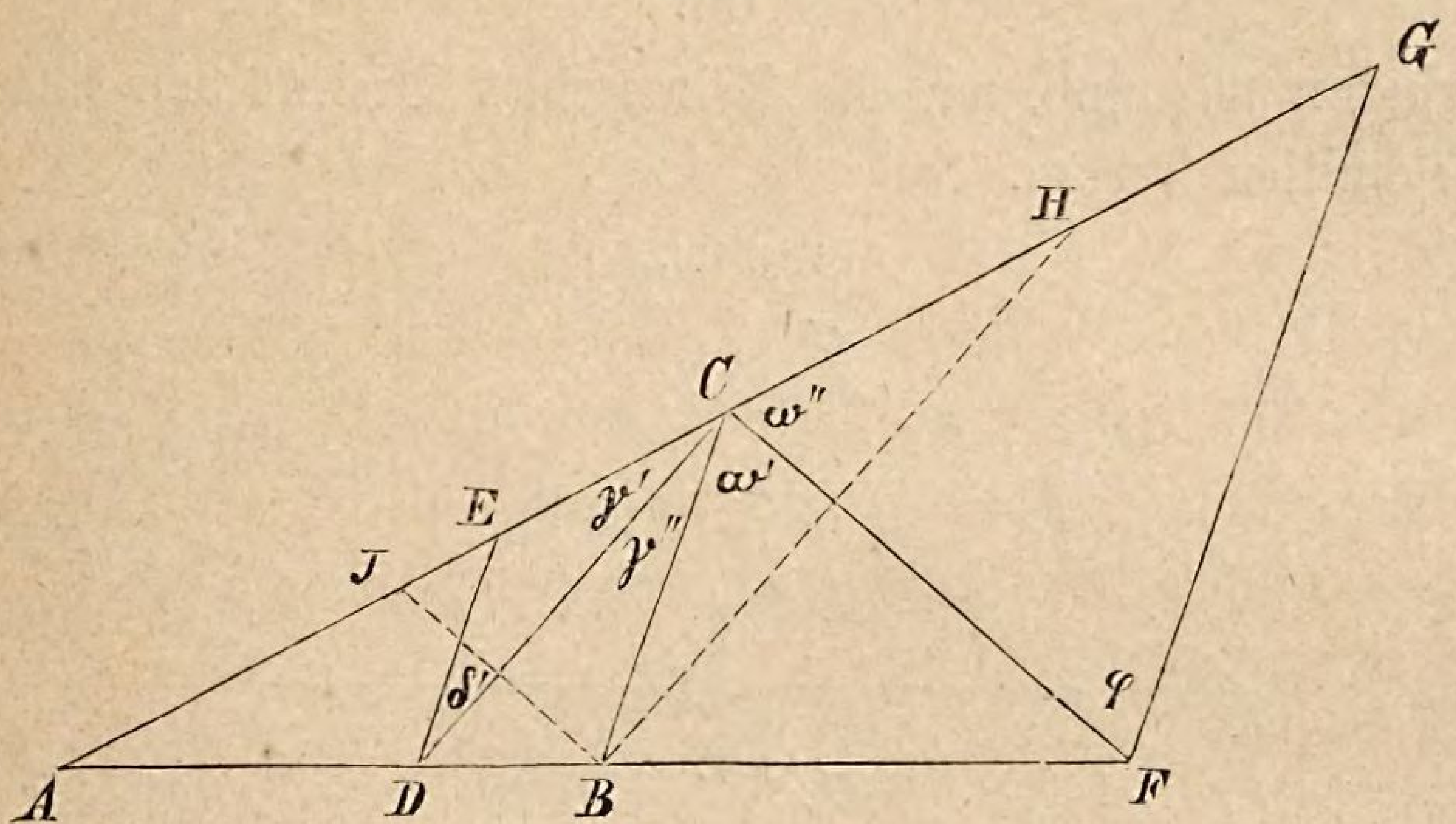
Untersuchen wir, wie die Dreiecksseiten von den Medialen getheilt werden.

Es sei (Fig. 100) $\gamma' = \gamma''$. Alsdann erhalten wir ein AD zu DB gleiches Verhältniß, wenn wir DE $\#$ BC machen; dann ist $\delta' = \gamma'' = \gamma'$, mithin DE = EC. Es ist aber:

$$\begin{aligned} AD : DB &= AE : EC \\ &= AE : ED \\ &= AC : BC. \end{aligned}$$

Halbirt man auch den Außenwinkel BCG und zieht durch den Theilpunkt F eine Parallele FG zu BC, so ist AF : BF = AG : CG.

Fig. 100.



Da aber $\varphi = \omega' = \omega''$, so ist CG = FG. Mithin ist:

$$\begin{aligned} AF : BF &= AG : FG \\ &= AC : BC. \end{aligned}$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

6. In einem Dreiecke theilt die Mediale eines Innenwinkels und die Mediale eines Außenwinkels die eine Dreiecksseite im Verhältnisse der beiden anderen.

Wir haben (Fig. 100):

$$\begin{aligned} DA : DB &= CA : CB \text{ und} \\ FA : FB &= CA : CB. \text{ Mithin:} \\ \hline DA : DB &= FA : FB. \end{aligned}$$

Die Entfernungen des Punktes D von A und B stehen also in demselben Verhältnisse zu einander wie die Entfernungen des Punktes F von A und B. Man sagt daher: AB ist in D und F, DF in B und A harmonisch getheilt. A, B, D und F sind harmonische Punkte, CA, CB, CD und CF sind harmonische Strahlen; A und B, D und F sind zugeordnete harmonische Punkte, CA und CB, sowie CD und CF sind zugeordnete harmonische Strahlen. — Aus Lehrsatz 6 ergibt sich also:

7. Eine Dreiecksseite wird durch die Medialen des gegenüberliegenden Winkels und seines Nebenwinkels harmonisch getheilt.

8. Die Medialen zweier Nebenwinkel bilden mit den Schenkeln des einen Winkels vier harmonische Strahlen.

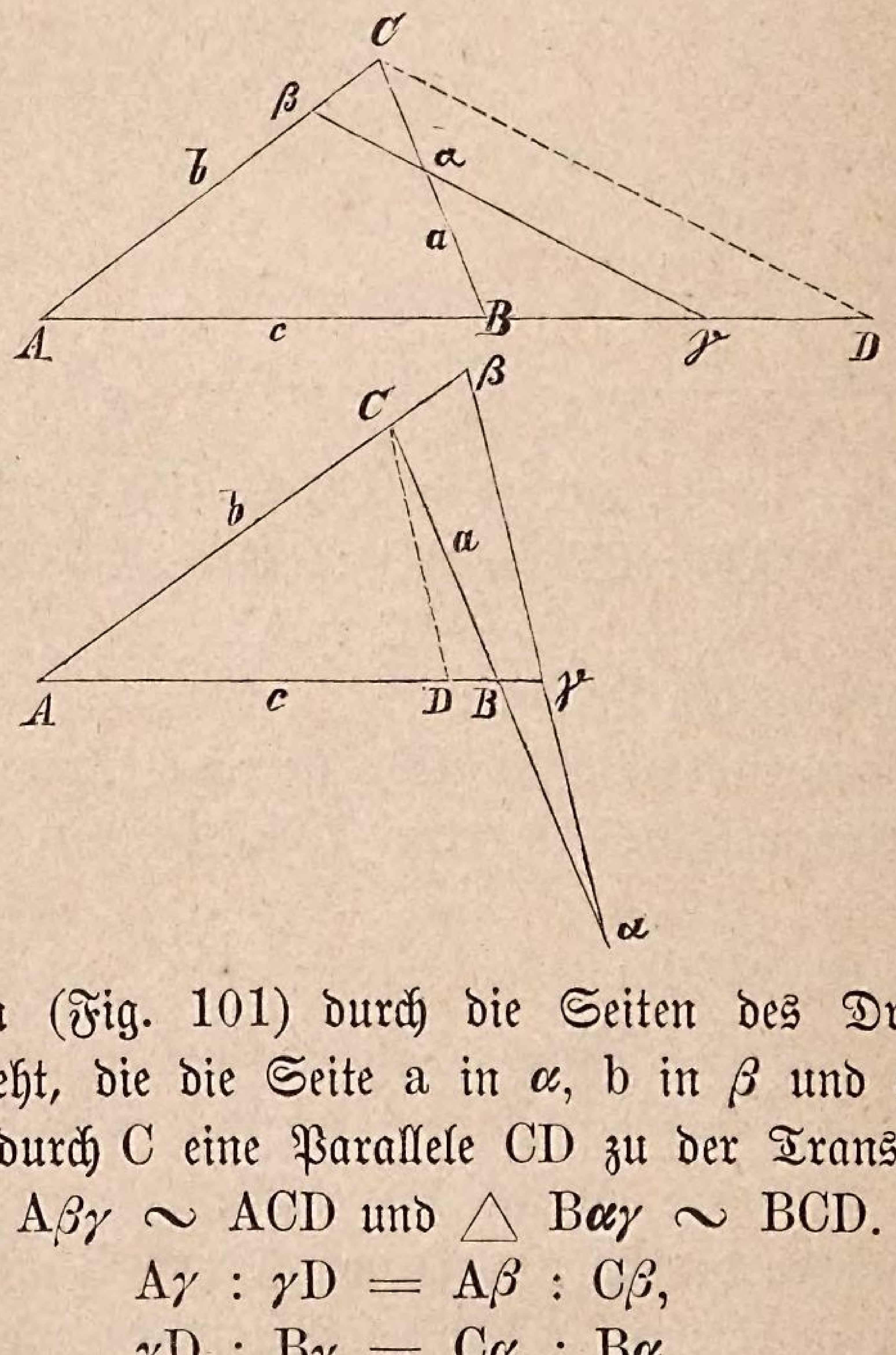
Der Beweis zu 6 läßt sich auch führen mit Hülfe einer Parallelen durch B mit der betreffenden Halbirungslinie.

Wenn (Fig. 100) BH ∦ DC und BJ ∦ FC, wie werden BJ und BH von den Medialen CD und CF getheilt?

§ 65.

Untersuchen wir nun, wie die Seiten eines Dreiecks von einer Transversalen geschnitten werden.

Fig. 101.



Wenn man (Fig. 101) durch die Seiten des Dreiecks ABC eine Transversale zieht, die die Seite a in α, b in β und c in γ schneidet, und man zieht durch C eine Parallele CD zu der Transversalen, so ist:

$$\triangle\ A\beta\gamma \sim ACD \text{ und } \triangle\ B\alpha\gamma \sim BCD. \text{ Mithin:}$$

$$A\gamma : \gamma D = A\beta : C\beta,$$

$$\gamma D : B\gamma = C\alpha : B\alpha.$$

$$A\gamma \cdot \gamma D : \gamma D \cdot B\gamma = A\beta \cdot C\alpha : C\beta \cdot B\alpha, \text{ oder}$$

$$A\gamma : B\gamma = A\beta \cdot C\alpha : C\beta \cdot B\alpha.$$

$$A\gamma \cdot B\alpha \cdot C\beta = A\beta \cdot C\alpha \cdot B\gamma.$$

(In der zweiten Figur ergibt sich zunächst: $B\gamma : BD = B\alpha : BC$; mithin durch Addition $\gamma D : B\gamma = C\alpha : B\alpha$).

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Werden die Seiten eines Dreiecks von einer geraden Linie durchschnitten, so sind die Produkte aus je drei nicht zusammenstoßenden Abschnitten einander gleich.

Da (Fig. 101) durch zwei Theilpuntte α und β der dritte γ vollständig bestimmt ist, so läßt sich 1 umkehren, wobei aber zu beachten, daß wenigstens ein Theilpunkt ein äußerer sein muß.

Es sei $A\gamma \cdot B\alpha \cdot C\beta = A\beta \cdot C\alpha \cdot B\gamma$. Gesetzt nun, γ läge nicht in der Geraden $\alpha\beta$, so möge $\alpha\beta$ die Gerade AB in γ' schneiden.

Alsdann ist nach 1

$A\gamma' \cdot B\alpha \cdot C\beta = A\beta \cdot C\alpha \cdot B\gamma'$. Da aber n. V.

$A\gamma \cdot B\alpha \cdot C\beta = A\beta \cdot C\alpha \cdot B\gamma$, so erhalten wir

durch Division: $A\gamma' : A\gamma = B\gamma' : B\gamma$.

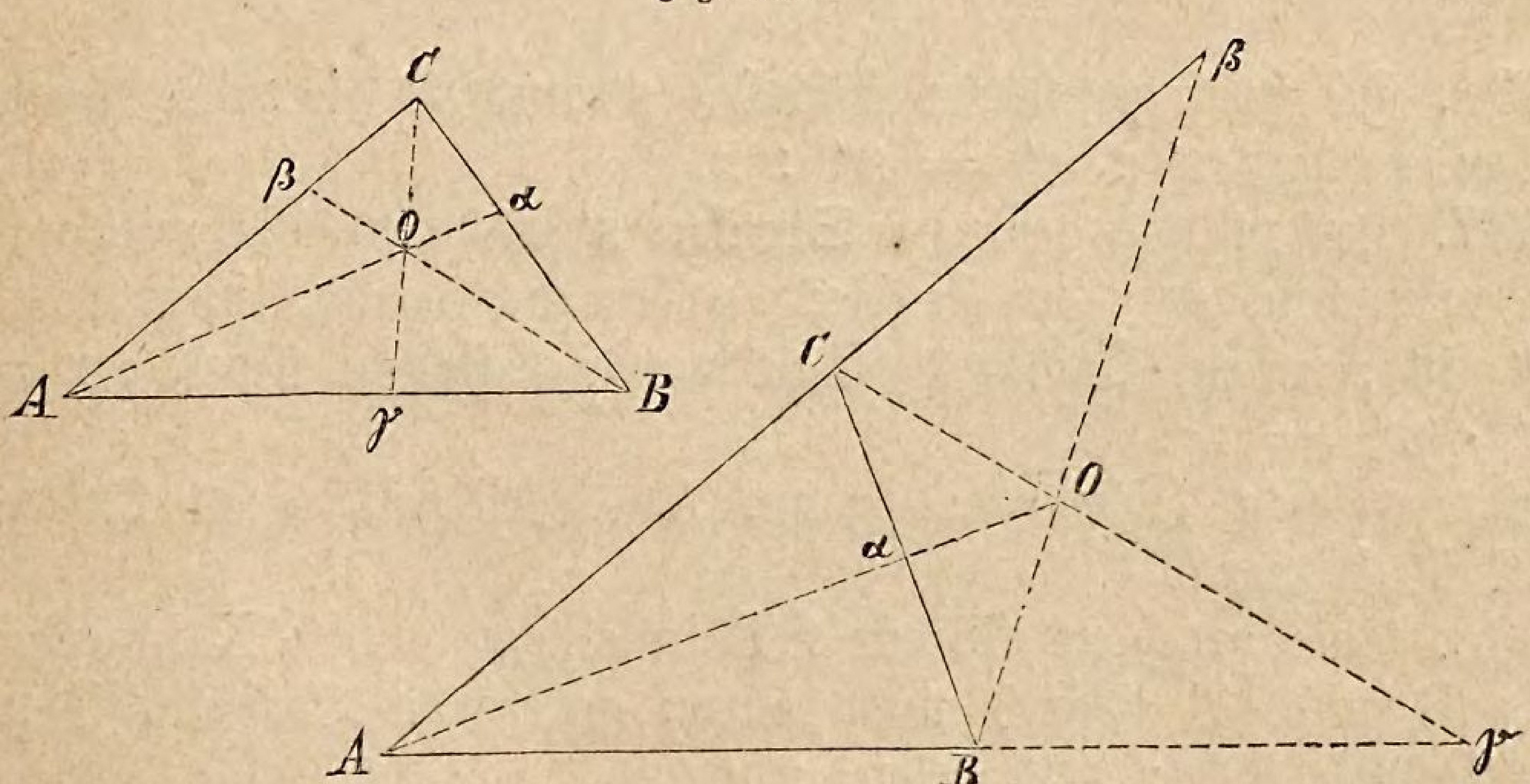
Dieses ist aber in allen Fällen unmöglich.

$\alpha\beta$ muß also durch γ gehen, d. h. die drei Punkte α, β, γ liegen in einer Geraden. Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks in drei Punkten, wovon einer oder drei äußere sind, so getheilt sind, daß die Produkte aus je drei getrennt liegenden Abschnitten gleich sind, so liegen die Theilpunkte in einer Geraden.

Untersuchen wir, wie die Seiten eines Dreiecks von drei durch einen Punkt gehende Ecktransversalen geschnitten werden. — Es gehen die drei Ecktransversalen $A\alpha$, $B\beta$ und $C\gamma$ (Fig. 102) durch den Punkt O.

Fig. 102.



Betrachten wir $C\gamma$ als Seitentransversale von Dreieck $AB\alpha$, $B\beta$ als Seitentransversale vom Dreieck $AC\alpha$, so ist nach Lehrs. 1:

$$A\gamma \cdot BC \cdot O\alpha = AO \cdot C\alpha \cdot B\gamma,$$
$$AO \cdot B\alpha \cdot C\beta = A\beta \cdot BC \cdot O\alpha.$$
$$\overline{}$$
$$A\gamma \cdot B\alpha \cdot C\beta = A\beta \cdot C\alpha \cdot B\gamma.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkte, so theilen sie die Dreiecksseiten in sechs Abschnitte, so daß die Produkte aus je drei nicht zusammenstoßenden Abschnitten einander gleich sind.

Wenn von den drei Theilpunkten α, β, γ (Fig. 102), wovon einer oder drei innere sind, zwei gegeben sind, so ist der dritte bestimmt. Es läßt sich daher 3 umkehren und dann leicht indirekt beweisen.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Werden die drei Seiten eines Dreiecks von drei Ecktransversalen in drei Punkten, wovon einer oder alle drei innere sind, so geschnitten, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenstoßenden Abschnitten einander gleich sind, so gehen die Transversalen durch einen Punkt.

Aufgaben.

§ 66.

535. Zu drei gegebenen Strecken s', s'', s''' die vierte Proportionale zu suchen, so daß $s' : s'' = s''' : x$.

(In welchen Lehrsätzen kommen vier in Proportion stehende Strecken vor?)

536. Zu zwei gegebenen Strecken s' und s'' die dritte Proportionale zu suchen, so daß $s' : s'' = s'' : x$.

537. Zu zwei gegebenen Strecken s' und s'' die mittlere Proportionale zu suchen, oder ein Rechteck, dessen aufeinander folgende Seiten s' und s'' sind, in ein Quadrat zu verwandeln, so daß also $s' : x = x : s''$, oder $s' \cdot s'' = x^2$.

(In welchen Lehrsätzen kommt die Gleichheit eines Quadrats und eines Rechtecks vor?)

538. Eine gegebene Strecke ST in einem Punkte X innerlich (X soll zwischen S und T liegen) nach einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ zu theilen, so daß $SX : XT = m : n$.

539. Eine gegebene Strecke ST in einem Punkte X äußerlich (X soll auf der Verlängerung von ST liegen) nach einem gegebenen Verhältniß m : n zu theilen.

540. Gegeben ist die Strecke ST und 1) zwischen S und T, 2) in der Verlängerung von ST ein Punkt P. Einen Punkt X zu bestimmen, so daß ST in P und X harmonisch getheilt ist, also SP : TP = SX : TX.

541. Gegeben ist die Gerade AB und außerhalb derselben der Punkt P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in welchem eine zwischen P und AB liegende Strecke nach einem gegebenen Verhältniß m : n 1) innerlich, 2) äußerlich getheilt wird?

542. Gegeben sind die beiden Parallelen AB und CD. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in welchem die von AB und CD begrenzte Strecke 1) innerlich, 2) äußerlich nach dem gegebenen Verhältnisse m : n geschnitten wird?

543. Gegeben sind die drei Parallelen AB, CD, EF. Eine Linie XY zu construiren, so daß jede gerade Schneidelinie AB, CD, EF und XY in vier harmonischen Punkten schneidet.

544. Zwei parallele, von den Schenkeln eines Winkels begrenzte Strecken sind die eine in X, die andere in Y nach dem Verhältniß m : n getheilt. In welchem Punkte schneidet die Gerade XY die Schenkel des Winkels?

545. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in welchem eine Strecke, die mit einer gegebenen Geraden parallel und von den Schenkeln eines Winkels begrenzt ist, nach dem Verhältniß m : n getheilt wird?

546. Zwei Strecken zu construiren, 1) deren Summe gleich s, und deren Verhältniß gleich m : n; 2) deren Differenz gleich d, und deren Verhältniß gleich m : n; 3) deren Quadrate sich zu einander verhalten wie die gegebenen Strecken s′ und s″, und deren Summe gleich s.

547. Eine Strecke ST innerlich so in X zu theilen, daß das Rechteck zwischen den Abschnitten einem gegebenen Quadrate gleich ist, also $AX \cdot BX = m^2$.

548. Das Verhältniß 1) zweier Quadrate $m^2 : n^2$, 2) zweier Vielecke auszudrücken in dem Verhältnisse zweier Strecken, so daß also $m^2 : n^2 = x : y$.

549. Das Verhältniß der Rationalzahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ auszudrücken in dem Verhältnisse ganzer Zahlen.

550. Das Verhältniß ganzer Zahlen auszudrücken in Linienverhältnissen.

551. Das Verhältniß der Quadratwurzeln aus Rationalzahlen in Linienverhältnissen auszudrücken, z. B. zwei Strecken s′ und s″ zu suchen, so daß $s' : s'' = \sqrt{3} : \sqrt{5}$.

552. Eine Strecke ST innerlich so zu theilen, daß sich ihre Abschnitte wie zwei gegebene Quadrate verhalten, also $SX : XT = m^2 : n^2$.

553. Eine Strecke ST über T bis zu einem Punkte X zu verlängern, so daß das Rechteck zwischen ST und TX gleich einem gegebenen Quadrate m^2 ist, also $ST \cdot TX = m^2$.

554. Eine Strecke ST über T bis zu einem Punkte X zu verlängern, so daß das Rechteck zwischen der Strecke und der verlängerten Strecke einem gegebenen Quadrate m^2 gleich ist, also $ST \cdot SX = m^2$.

555. Eine Strecke ST innerlich so zu theilen, daß die Summe der Quadrate der beiden Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrate m^2 ist, also $SX^2 + XT^2 = m^2$.

556. Eine Strecke ST innerlich so zu theilen, daß die Differenz der Quadrate der beiden Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrate m^2 ist, also $SX^2 - XT^2 = m^2$.

557. Gegeben ist der Winkel BAC und auf AB der Punkt D. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in welchem die geraden Verbindungslinien des Punktes B mit AC in dem Verhältniß AD : DB geschnitten werden?

558. Gegeben ist der Winkel BAC und 1) innerhalb, 2) außerhalb desselben der Punkt P. Durch P eine Strecke so zu ziehen, daß ihre Abschnitte zwischen P und den Schenkeln von $\sphericalangle$ BAC 1) einander gleich, 2) sich verhalten wie m : n.

559. Gegeben sind die drei Strahlen AB, AC, AD und der Punkt P. Durch P eine Gerade, welche jene Strahlen in β, γ, δ schneidet, so zu ziehen, daß 1) $\beta\gamma$ und $\gamma\delta$, 2) $\beta\delta$ und $\beta\gamma$, 3) $\beta\delta$ und $\gamma\delta$ in dem gegebenen Verhältniß m : n stehen.

560. Gegeben sind die beiden Geraden G und G' und der Punkt P. Eine gerade Verbindungslinie zwischen P und G zu ziehen, so daß 1) der Halbirungspunkt derselben, 2) der Punkt, in welchem dieselbe in dem Verhältniß m : n getheilt wird, von G' die gegebene Entfernung e hat.

561. Gegeben sind n von A ausgehende Strecken. Dieselben sollen im Verhältnisse p : q sich ändern.

562. Gegeben sind die Parallelen P und P' und auf P die Abschnitte AB, BC, CD u. s. w. und auf P' die Strecke A'B'. Auf P' die Abschnitte zu construiren, die zu A'B' dasselbe Verhältniß haben, wie die Abschnitte von P zu AB.

563. Gegeben ist ein Vieleck und innerhalb des Winkels α desselben der Punkt P. Es soll ein dem gegebenen Vielecke ähnliches construirt werden, welches mit demselben den Winkel α gemeinschaftlich hat, und dessen eine Seite durch P geht.

564. Ueber einer gegebenen Strecke ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist.

565. Gegeben sind zwei ähnliche Vielecke. Ein Vieleck zu construiren, welches den beiden gegebenen ähnlich und 1) der Summe derselben, 2) dem einen derselben an Inhalt gleich ist.

566. Gegeben sind zwei Vielecke. Ein Vieleck zu construiren, welches dem einen der beiden gegebenen ähnlich und dem anderen an Inhalt gleich ist.

567. Gegeben ist das Dreieck ABC. Ueber AB als Grundlinie ein Dreieck zu construiren, welches sich zu △ ABC verhält wie m zu n, und wovon außerdem gegeben ist: 1) ein AB anliegender Winkel, 2) die AB zugehörende Mittellinie, 3) eine AB nicht zugehörende Mittellinie, 4) eine AB nicht zugehörende Höhe, 5) die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, 6) die Differenz der Quadrate der beiden anderen Seiten.

568. Gegeben ist das Dreieck ABC. Ein Dreieck zu construiren, welches mit △ ABC übereinstimmt in einer Höhe und sich zu demselben verhält wie m : n, und wovon außerdem gegeben: 1) ein an der der gegebenen Höhe entsprechenden Grundlinie liegender Winkel, 2), 3), 4), 5), 6) wie bei Nr. 567.

569. Gegeben ist das Dreieck ABC. Ein Dreieck zu construiren, dessen eine Seite sich zu AB verhält wie p : q, und dessen Inhalt sich zum Inhalt von △ ABC verhält wie m : n, und wovon außerdem gegeben sind: 1) ein an der AB entsprechenden Seite anliegender Winkel, 2), 3), 4), 5), 6) wie bei Nr. 567.

570. Ein Parallelogramm zu construiren, welches sich 1) zu einem gegebenen Parallelogramme, 2) zu einem gegebenen Dreiecke verhält wie m : n und a) mit der gegebenen Figur in einer Höhe übereinstimmt, b) dessen eine Höhe sich zu einer Höhe der gegebenen Figur verhält wie p : q, und wovon außerdem gegeben 1) eine Seite, 2) ein Winkel, 3) eine Diagonale, 4) die zweite Höhe.

571. Gegeben ist das Dreieck ABC. Ein Dreieck zu construiren, welches zu dem gegebenen in dem Verhältnisse m : n steht, dessen eine Ecke in A, dessen Grundlinie in der Geraden AB und dessen Spitze 1) in einem gegebenen Punkte liegt, 2) von drei gegebenen Punkten dieselbe Entfernung hat, 3) von drei gegebenen Geraden dieselbe Entfernung hat.

572. Eine gegebene Strecke im Verhältnisse 1) von gegebenen Rationalzahlen, 2) von gegebenen Vielecken, 4) von gegebenen Quadratwurzeln aus Rationalzahlen zu theilen.

573. Ein Vieleck von 1) einer Ecke, 2) einem Punkte des Umfangs, 3) einem Punkte im Innern aus zu theilen im Verhältnisse von gegebenen a) Strecken, b) Rationalzahlen, c) Quadratwurzeln aus Rationalzahlen, d) Vielecken.

574. 1) ein Quadrat, 2) ein Rechteck, wovon eine Seite gegeben ist, zu construiren, welches zu einem gegebenen a) Quadrate, b) ungleichseitigen Rechtecke, c) schiefen Parallelogramme, d) Vielecke im Verhältnisse zweier Strecken, zweier Vielecke, zweier Rationalzahlen, zweier Quadratwurzeln aus Rationalzahlen steht.

575. Ein Dreieck, ein Parallelogramm durch eine gerade Linie, welche 1) einer Seite, 2) einer gegebenen Geraden parallel ist, in zwei Theile zu theilen, welche sich verhalten wie m : n.

576. Gegeben sind zwei Parallelen und außerhalb ein Punkt. Von dem Punkte aus zwei gerade Linien, wovon die eine eine gegebene Richtung hat oder die Parallelen unter einem gegebenen Winkel schneidet, so zu ziehen, daß das von den Parallelen und den beiden geraden Linien gebildete Viereck gleich einem gegebenen Quadrate, einem gegebenen Vielecke.

577. Gegeben sind zwei Parallelen und außerhalb ein Punkt. Von dem Punkte aus gerade Linien, wovon zwei die Parallelen unter gegebenen Winkeln schneiden, so zu ziehen, daß die entstehenden Vierecke in gegebenem Verhältnisse stehen.

Von einem rechtwinkligen Dreiecke sind gegeben:

578. m_a, m_b.	583. h_a, $a : b$.	587. $\mu\beta$, $(b + c) : a$.
579. m_b, m_c.	584. h_a, $b : c$.	588. h_a, $(b - c) : a$.
580. a, $b : c$.	585. h_a, $(b + c) : a$.	589. m_b, $(b - c) : a$.
581. a, $a : b$.	586. m_b, $(b + c) : a$.	590. $\mu\beta$, $(b - c) : a$.
582. c, $a : b$.		

Von einem gleichschenkligen Dreiecke sind gegeben:

591. a, $a : b$.	596. b, $b : h_a$.	601. h_a, $a : h_b$.
592. a, $a : h_a$.	597. b, $a : b$.	602. a, $h_a : h_b$.
593. a, $b : h_a$.	598. b, $a : h_a$.	603. b, $h_a : h_b$.
594. a, $a : h_b$.	599. b, $a : h_b$.	604. a, m_b.
595. a, $b : h_b$.	600. h_a, $a : b$.	605. m_b, $\sphericalangle\, m_b\, m_b$.

Von einem Dreiecke sind gegeben:

606. c, m_a, m_b.	618. m_a, α, $b : c$.	630. a, α, $h_b : h_c$
607. h_c, m_a, m_b.	619. $\mu\alpha$, α, $b : c$.	631. a, b, $a : h_a$.
608. h_c, m_a, $\sphericalangle\, m_a\, m_b$.	620. h_a, $a : b : c$.	632. a, b, $a : h_b$.
609. m_a, m_b, m_c.	621. m_a, $a : b : c$.	633. a, $h_a : h_b : h_c$.
610. a, $b : m_a$, $b : m_c$.	622. $\mu\alpha$, $a : b : c$.	634. h_a, h_b, h_c.
611. a, $b : m_b$, $b : m_c$.	623. $a + b$, γ, $a : b$.	635. h_a, $h_a : h_b : h_c$.
612. a, β, $a : c$.	624. $a - b$, γ, $a : b$.	636. m_a, $h_a : h_b : h_c$.
613. a, β, $a : b$.	625. $a + b$, α, $b : c$.	637. $\mu\alpha$, $h_a : h_b : h_c$.
614. a, α, $b : c$.	626. $a - b$, α, $b : c$.	638. m_a, $m_a : m_b : m_c$.
615. a, b, $b : c$.	627. $a + b$, $a : b : c$.	639. a, $m_a : m_c : m_c$.
616. a, $a : b : c$.	628. $a - b$, $a : b : c$.	640. h_a, $m_a : m_b : m_c$.
617. h_a, α, $b : c$.	929. $a + b + c$, $a : b : c$.	

Von einem Parallelogramme sind gegeben:

641. a, b, $a : d''$.	645. a, b, $h_a : d''$.	649. d'', α, $a : b$.
942. a, α, $b : d'$.	646. a, $\sphericalangle\, d''d'$, $d'' : d'$.	650. d', α, $a : b$.
643. a, d'', $b : h_a$.	647. a, d'', $d'' : d'$.	651. a, b, ${}^{b}P_a : h$.
644. b, $\sphericalangle\, ad''$, $a : d''$.	648. h, $\sphericalangle\, d''d'$, $d'' : d'$.	652. a, d', ${}^{d}P_a : d'$.

Von einem Rechtecke sind gegeben:

653. a, b : a.
654. d′, a : b.
655. b, a : d′.
656. d′, a : d′.
657. a + b, a : b.
658. a — b, a : b.
659. a + d′, a : d′.
660. d′ — a, a : d′.
661. a + b, b : d′.
662. a — b, a : d′.

Siebentes Kapitel.

Vom Kreise.

§ 67.

Der Kreis entsteht durch die Bewegung einer Strecke, die sich, in derselben Ebene bleibend, um einen ihrer Endpunkte dreht, bis sie in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Die Strecke heißt Halbmesser oder Radius, der feste Punkt Mittelpunkt, der sich bewegende Endpunkt beschreibt die Peripherie oder den Umfang, die Kreislinie, welche mithin der Inbegriff der Punkte der Ebene ist, die von dem Mittelpunkte die Entfernung eines Radius haben. Sie trennt die Kreisfläche oder den Inbegriff der Punkte der Ebene, deren Entfernungen vom Mittelpunkte kleiner als ein Radius sind, von der Gesammtheit der Punkte, deren Entfernungen vom Mittelpunkte größer als ein Radius sind. — Der Kreis kann in Beziehung gesetzt werden zu einer und mehreren geraden Linien, zu einem und mehreren Kreisen.

Der Kreis und die gerade Linie.

A. Der Kreis und eine Gerade.

§ 68.

Geht eine Gerade durch einen Punkt im Innern des Kreises, so muß sie die Kreislinie, da dieselbe eine geschlossene Linie von endlicher Ausdehnung ist, während die Gerade sich nach beiden Seiten in's Unendliche erstreckt, auf jeder Seite des Punktes einmal durchschneiden. Da aber die Durchschnittspunkte vom Mittelpunkte die Entfernung eines Radius haben, es von einem Punkte nach einer Geraden aber nur zwei gleiche gerade Verbindungslinien geben kann (§ 23), so kann die Gerade die Kreislinie nur in zwei Punkten schneiden.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

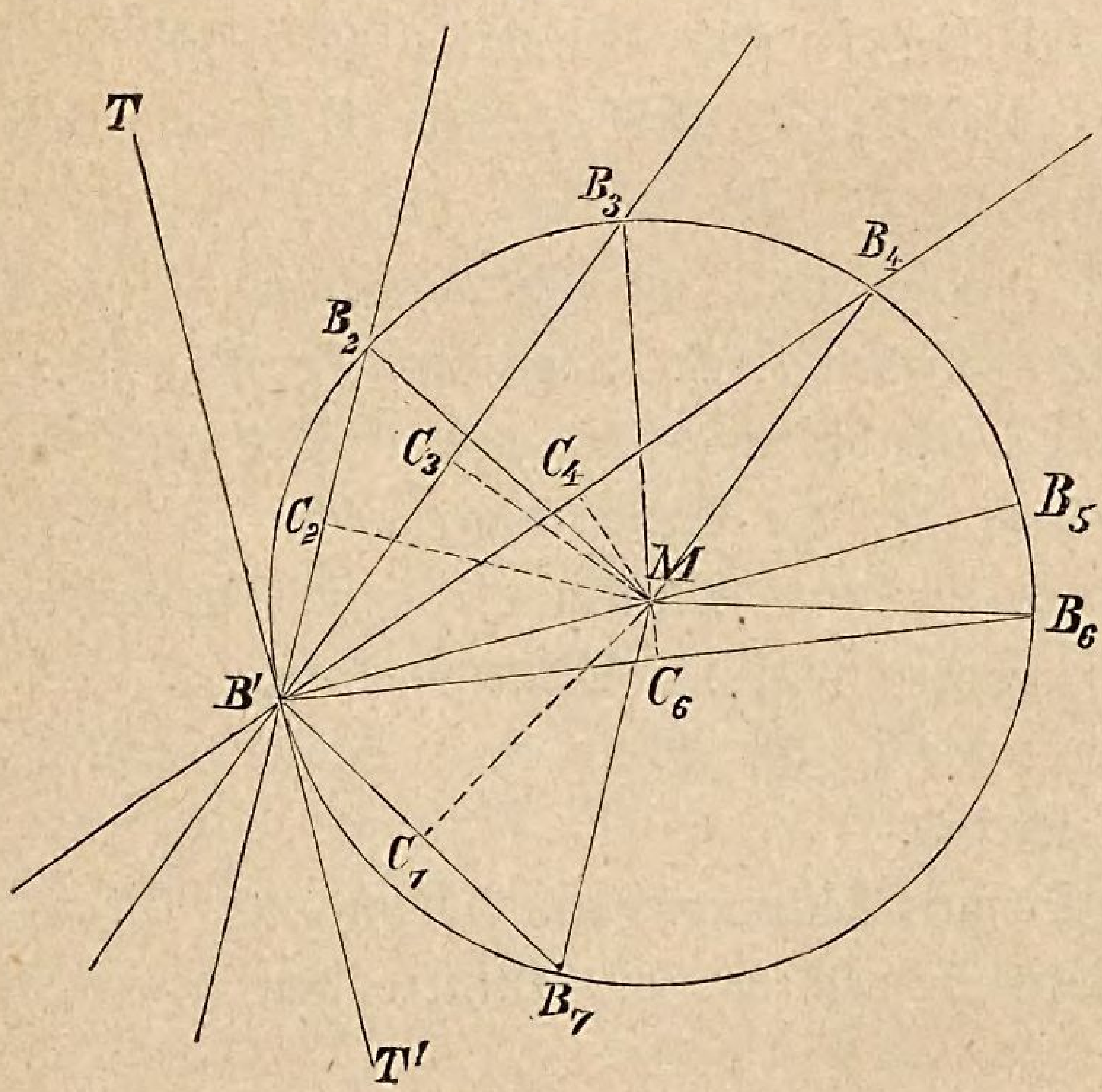
1. Eine Gerade kann eine Kreislinie nur in zwei Punkten schneiden.

2. Durch drei in einer Geraden liegende Punkte läßt sich keine Kreislinie legen.

§ 69.

Die Strecke zwischen den beiden Durchschnittspunkten einer Geraden und einer Kreislinie heißt Sehne. Unter einer Sehne versteht man also die gerade Verbindungslinie zweier Punkte der Kreislinie. Diese wird durch eine Sehne in zwei Bogen getheilt. Unter dem zu einer Sehne gehörigen Bogen versteht man gewöhnlich den kleineren Bogen. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so wird sie Durchmesser genannt, welcher gleich dem doppelten Radius ist.

Fig. 103.



Untersuchen wir die Größe der Sehnen und ihre Beziehungen zum Mittelpunkte (Fig. 103).

Der Kreis M entsteht, indem sich die Strecke (Radius) MB in derselben Ebene um den festen Punkt M (Mittelpunkt) dreht, bis sie in die ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Denken wir uns nun den sich bewegenden Endpunkt B des Radius in jeder Lage durch eine gerade Linie mit seiner ursprünglichen Lage verbunden, so erhalten wir rücksichtlich der Größe und der Beziehung zum Mittelpunkte alle möglichen Sehnen, da die Kreislinie und jeder Kreisbogen

wegen der Gleichheit aller Radien die Eigenschaft hat, daß man sie in der Kreislinie beliebig weit herumführen kann. In jeder Lage aber ist die Sehne Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze der Mittelpunkt M, und dessen Schenkelseiten zwei Radien sind. Die Sehne wächst daher mit dem Winkel μ an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks (§ 23, 2). Sie wächst von Null (wenn $\mu = 0$) an bis 2r (r bedeutet Radius), in welchem Falle $\mu = 2R$, und die Schenkel MB′ und MB_5 also einen Durchmesser bilden. Dreht sich der Radius über MB_5 hinaus, so nimmt die Sehne wieder ab und durchläuft in umgekehrter Ordnung wiederum alle Werthe zwischen 2r und Null. Da die Sehne Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist, so gelten die Lehrsätze in § 23. Wenn also $B_1C_2 = C_2B_2$, so ist $MC_2 \perp B_1B_2$; wenn $MC_3 \perp B_1B_3$, so ist $B_1C_3 = C_3B_3$; wenn $B_1C_4 = C_4B_4$, so geht die Senkrechte in C_4 durch M. Ferner ist $\sphericalangle B_1MC_2 = C_2MB_2$ u. s. w.; wenn $B_1B_2 = B_1B_7$, so ist $\triangle B_1MB_2 \cong B_1MB_7$, mithin $MC_2 = MC_7$; wenn $\sphericalangle B_1MB_2 < B_1MB_3$, oder $B_1B_2 < B_1B_3$, so ist $MC_2 > MC_3$ (§ 23, 2).

Wir erhalten also, wenn wir die angeführten Lehrsätze vom gleichschenkligen Dreiecke auf den Kreis anwenden, die Lehrsätze:

1. Die gerade Verbindungslinie des Kreises mit der Mitte einer Sehne steht senkrecht auf der Sehne und halbirt den Mittelpunktswinkel.

2. Die Senkrechte vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne gefällt halbirt die Sehne und den Mittelpunktswinkel.

3. Die Senkrechte in der Mitte einer Sehne errichtet geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

4. Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

5. Von zwei Sehnen hat die kleinere den größeren Abstand vom Mittelpunkte.

Wenn (Fig. 103) $MC_2 = MC_7$, so ist $\triangle MC_2B_2 \cong MC_7B_7$; mithin $B_2C_2 = B_7C_7$, also auch $B_1B_2 = B_1B_7$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

6. Sehnen, welche gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, sind einander gleich.

Wenn (Fig. 103) $MC_2 > MC_3$, so läßt sich leicht indirekt zeigen, daß $B_1B_2 < B_1B_3$. Wir erhalten also den Lehrsatz:

7. Von zwei Sehnen ist diejenige die kleinere, welche den größeren Abstand vom Mittelpunkte hat.

§ 70.

Verlängert man die Sehne eines Kreises, so liegen die Verlängerungen ganz außerhalb des Kreises. Dreht man die Sehne, etwa B_1B_4 um einen ihrer Endpunkte B_1 (Fig. 103), so bleiben die obigen Lehrsätze bestehen, die Endpunkte aber rücken schließlich immer näher, um zuletzt in einen Punkt zusammen zu fallen. Alsdann in der Lage B_1T ist die Sehne unendlich klein geworden, ihre beiden Endpunkte fallen mit ihrer Mitte zusammen, und bilden also diese drei Punkte nur einen einzigen Punkt. Hier hat also die verlängerte Sehne TT' nur einen einzigen Punkt mit dem Kreise gemeinschaftlich. Eine Gerade, welche nur einen Punkt mit einem Kreise gemeinschaftlich hat, heißt Tangente des Kreises, der gemeinschaftliche Punkt Berührungspunkt : TT' berührt den Kreis in B_1. Da die Sätze 1, 2, 3 unabhängig von der absoluten Größe der Sehne sind, so gelten sie auch für die Grenzwerthe, also wenn die Sehne gleich Null, und wenn sie gleich $2r$ wird. Der Durchmesser ist also (§ 69, 7), weil er von allen Sehnen die kleinste Entfernung vom Mittelpunkte hat, die größte Sehne, und von der Tangente als verlängerter kleinsten Sehne gelten folgende Lehrsätze:

1. Die gerade Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Berührungspunkte einer Tangente steht senkrecht auf der Tangente.

2. Die Senkrechte vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Tangente gefällt geht durch den Berührungspunkt.

3. Die Senkrechte im Berührungspunkte einer Tangente geht durch den Mittelpunkt.

Die vorhergehenden Lehrsätze 1, 2, 3 ergeben sich auch leicht auf folgende Weise: Da TT' (Fig. 103) als Tangente mit Ausnahme des Berührungspunktes B_1 ganz außerhalb des Kreises liegt, so ist MB_1 die kürzeste Entfernung des Punktes M von der Geraden TT', mithin steht sie senkrecht auf TT' (§ 22, 2), daher Lehrsatz 1. Da es aber von M auf TT' nur eine Senkrechte gibt, so erhalten wir Lehrsatz 2; und da in B_1 sich auf TT' nur eine Senkrechte errichten läßt, so ergibt sich Lehrsatz 3.

Da es in einem Punkte auf dieselbe Gerade nur eine Senkrechte gibt, so läßt sich 3 umkehren.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Die Senkrechte, im Endpunkte eines Radius oder Durchmessers errichtet, ist eine Tangente.

§ 71.

Aus § 69, 3 ergibt sich, daß die Senkrechte in der Mitte einer Strecke der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise ist, die durch die Endpunkte der Strecke gehen. Durch zwei Punkte lassen sich unendlich viele Kreise legen. Sind aber von einem Kreise drei Punkte A, B, C gegeben, so können wir die beiden Strecken AB und BC ziehen, die also Sehnen werden sollen. Soll AB Sehne werden, so muß der Mittelpunkt des Kreises auf der in der Mitte von AB errichteten Senkrechten liegen. Soll BC auch Sehne werden, so muß der Mittelpunkt auf der in der Mitte von BC errichteten Senkrechten liegen. Sollen also beide Sehnen werden, so muß der Mittelpunkt im Durchschnittspunkte der beiden Senkrechten liegen. Diese Senkrechten aber sind parallel, wenn AB und BC in derselben Geraden liegen. Ist dagegen ABC eine gebrochene Linie, so müssen sich die Senkrechten in einem Punkte, aber auch nur in einem Punkte, schneiden, der von A, B und C dieselbe Entfernung hat.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist eine Kreislinie vollständig bestimmt (d. h. läßt sich immer ein Kreis, aber nur einer, legen.

§ 72.

Während der Mittelpunkt eines Kreises von allen Punkten der Kreislinie gleich weit entfernt ist, sind die geraden Verbindungslinien irgend eines anderen Punktes mit den Punkten der Kreislinie ungleich. Vom Punkte A (Fig. 104) lassen sich nach der Kreislinie unendlich viele gerade Verbindungslinien ziehen.

Fig. 104 a.

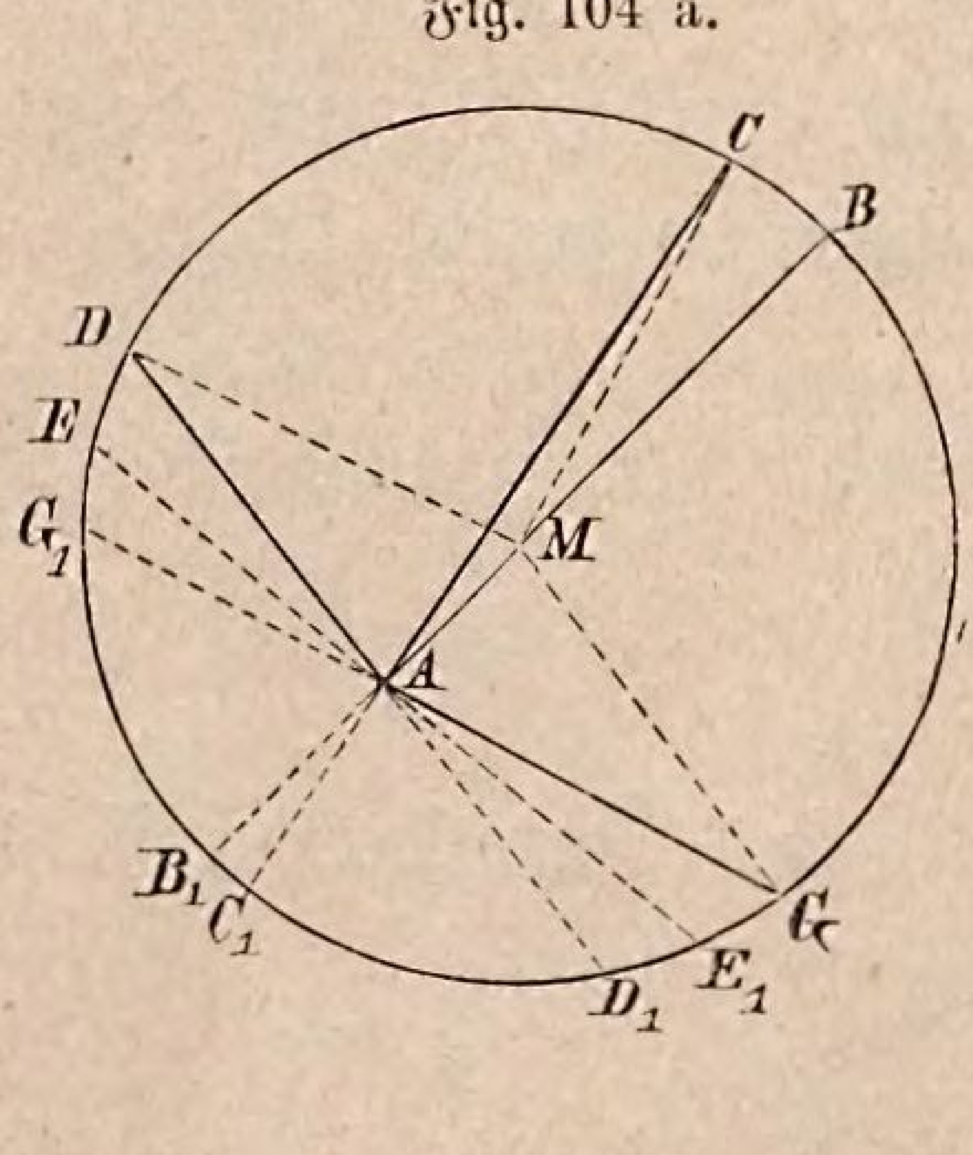
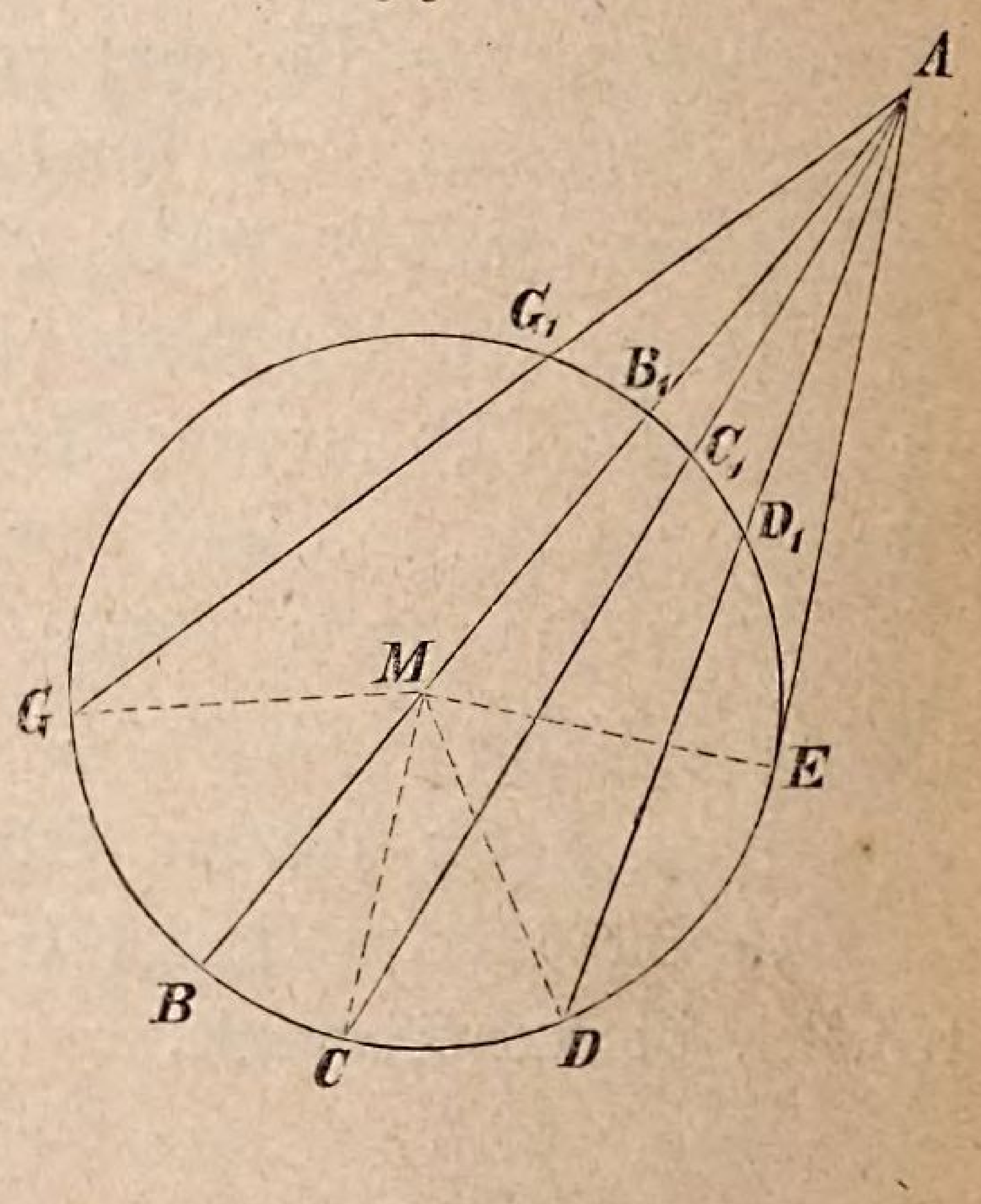


Fig. 104 b.



Verbindet man die Endpunkte derselben, z. B. von AC, AD, AG, mit M, so erhalten wir die Dreiecke AMC, AMD, AMG u. s. w. Diese Dreiecke stimmen überein in zwei Seiten, wovon die eine AM und die andere gleich dem Radius r. Die Verbindungslinien AB, AC, AD, AG sind also um so größer, je größer der von AM und r eingeschlossene Winkel ist (§ 28, 5). Dieser ist am größten, wenn, wie bei AB, die Verbindungslinie durch den Mittelpunkt geht, in welchem Falle er gleich 2 R. Wenn also B_1AB durch den Mittelpunkt geht, also B_1B ein Durchmesser ist, so ist AB die größte Verbindungslinie des Punktes A mit einem Punkte der Kreislinie und zwar gleich AM + r, dagegen AB_1 die kürzeste, denn bei AB_1 ist der von AM und r (hier MB_1) eingeschlossene Winkel gleich Null, und daher ist $AB_1 = r - AM$ (Fig. 104 a) oder $AB_1 = AM - r$ (Fig. 104 b), also $AB_1 = \pm (r - AM)$. Auf derselben Seite von dem Durchmesser BB_1 gibt es nicht zwei gleiche Winkel zwischen AM und r. Dagegen sind je zwei Winkel auf verschiedenen Seiten von BB_1 einander gleich. Ist aber $\sphericalangle$ DAM = GAM, so ist $\triangle$ DAM $\cong$ $\triangle$ GAM, mithin AD =' AG. Es sind also diejenigen Verbindungslinien einander gleich, welche sich gleich weit vom Durchmesser entfernen.

Nach einer Seite verlängerte Sehnen heißen Sekanten, z. B. AG, AB u. s. w. (Fig. 104 b), AG_1, AB_1 u. s. w. sind ihre äußeren Abschnitte. Bei der Tangente AE wird der äußere Abschnitt der ganzen Sekante gleich; es ist alsdann AE $\perp$ ME (§ 70, 1). Wenn in der Fig. 104 a AE $\perp$ BB_1, so ist AE = AE′.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Von allen geraden Verbindungslinien, die man von einem Punkte nach einer Kreislinie ziehen kann, liegen je zwei, eine größere und eine kleinere, in derselben Geraden. Die größte und kleinste liegen in der durch den Mittelpunkt gehenden Geraden. Von jedem in derselben Geraden liegenden Paare ist die größere um so kleiner und die kleinere um so größer, je weiter sich die Gerade vom Mittelpunkte entfernt. Entsprechende Verbindungslinien verschiedener Paare sind gleich, wenn sie sich gleich weit vom Mittelpunkte entfernen. Verbindungslinien desselben Paares sind gleich, wenn sie Tangenten oder auf dem Durchmesser senkrecht stehende Halbsehnen sind.

Wie heißt der Lehrsatz nur rücksichtlich der Sekanten?

B. **Der Kreis und zwei Geraden**, oder **über die Winkel im Kreise.**

§ 73.

Der Kreis M (Fig. 104) entsteht dadurch, daß sich MC in derselben Ebene bleibend um M dreht. Mithin bildet der Radius in jeder neuen Lage MD mit der ursprünglichen Lage einen Winkel CMD, dessen Scheitel im Mittelpunkt liegt, und welcher deßhalb Mittelpunktswinkel oder Centriwinkel heißt. Ein Mittelpunktswinkel ist also ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind. Aus der Entstehungsweise des Kreises folgt die Gleichheit der Radien desselben Kreises in allen Lagen, und hieraus, daß sich jeder Bogen in der Kreislinie herumführen läßt, ohne dieselbe auch nur in einem Punkte zu verlassen. Legt man daher zwei gleiche Centriwinkel desselben oder gleicher Kreise deckend aufeinander, so müssen sich auch die Bogen decken, da ja ihre Endpunkte in einander fallen. Aber auch bei gleichen Bogen müssen die zugehörigen Centriwinkel gleich sein, da die gleichen Bogen und mit ihnen die Centriwinkel zum Decken gebracht werden können. In beiden Fällen decken sich auch die zugehörigen Sektoren oder Kreisausschnitte, d. h. die von je zwei Radien und dem zugehörigen Bogen begrenzten Flächenstücke, sowie die Segmente oder Kreisabschnitte, d. h. die von je einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzten Flächenstücke.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Sektoren, gleiche Segmente.

2. Zu gleichen Bogen gehören gleiche Centriwinkel, gleiche Sehnen, gleiche Sektoren, gleiche Segmente.

Aus 1 ergibt sich:

3. Der Durchmesser theilt den Kreis und die Kreislinie in zwei gleiche Theile, in Halbkreise.

§ 74.

Es ist nun zu untersuchen, in welchem Verhältnisse bei einer bestimmten Zunahme eines Centriwinkels μ der zugehörige Bogen und Sektor wächst. Bedeutet m irgend eine ganze Zahl, p, q, r, s u. s. w. gleiche oder verschiedene ganze Zahlen zwischen o und 10, so stellt m, pqrst . . . . . $= m + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} + \frac{s}{10000} + \frac{t}{100000} +$ u. s. w. jede Zahl dar;

bei einer Rationalzahl ist die Anzahl der Decimalstellen oder doch der Stellen der Periode endlich, bei einer Irrationalzahl dagegen unendlich. Wächst nun der Centriwinkel zu dem mfachen, d. h. wird er gleich $m \cdot \mu$, so wird auch der Bogen mmal größer. War der Bogen also μ_β, so wird er jetzt $m \cdot \mu_\beta$. Wächst der Centriwinkel um $\frac{p}{10}\mu$, so wächst der Bogen um $\frac{p}{10}\mu_b$; wächst der Centriwinkel um $\frac{q}{100}\mu$, $\frac{r}{1000}\mu$, $\frac{s}{10000}\mu$, $\frac{t}{100000}\mu$ u. s. w., so wächst der Bogen um $\frac{q}{100}\mu_b$, $\frac{r}{1000}\mu_b$, $\frac{s}{10000}\mu_b$, $\frac{t}{100000}\mu_b$. Wächst also der Centriwinkel μ zu dem Centriwinkel $\mu \cdot m, pqrst \ldots$ an, so wächst der Bogen μ_b zu dem Bogen $\mu_b \cdot m, pqrst \ldots$ Die Bogen wachsen also in demselben Verhältnisse wie die Centriwinkel.

Dasselbe ergibt sich für die Sektoren.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

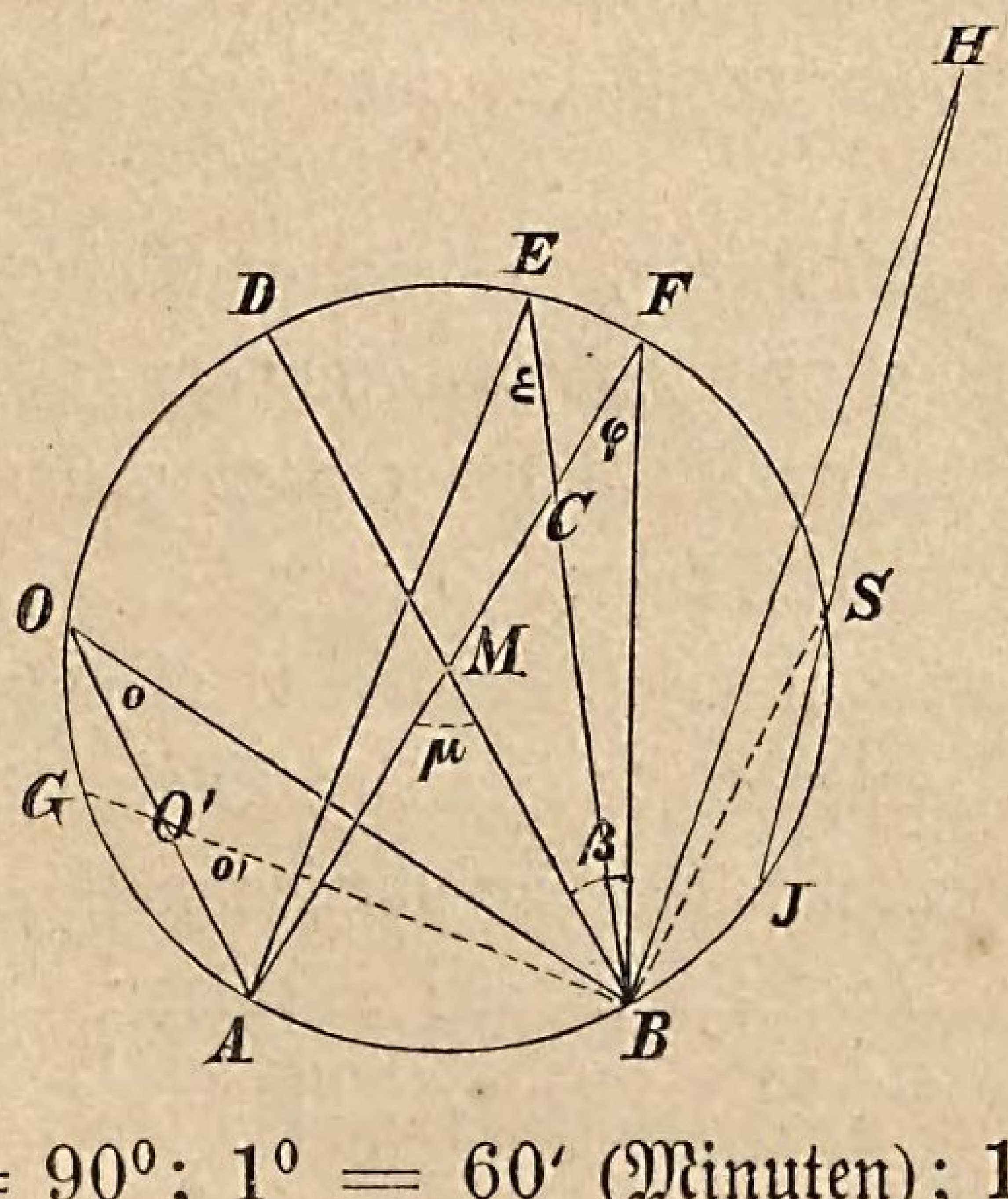
1. In demselben oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Centriwinkel und Sektoren zu einander wie die zugehörigen Bogen, oder die Bogen sind das Maß der Centriwinkel.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich auch auf dieselbe Weise führen wie § 44, 2, nämlich indirekt.

§ 75.

Die Kreislinie wird in 360 gleiche Theile getheilt, und jeder dieser Bogen heißt ein Grad (Bogengrad). Verbindet man die Theilpunkte mit dem Mittelpunkte, so entstehen 360 Winkelgrade. Wir haben also 4 R = 360° (Grad).

Fig. 105.



Es ist also R = 90°; 1° = 60′ (Minuten); 1′ = 60″ (Sekunden). Es gehört nun zu dem Centriwinkel a° der Bogen a° und umgekehrt.

Ist z. B. der Bogen $7^0\ 14'\ 18{,}6''$, so beträgt der zugehörige Centriwinkel $7^0\ 14'\ 18{,}6''$, aber das erstere sind Bogengrade, und das letztere sind Winkelgrade. Die Winkelgrade sind bei allen Kreisen gleich groß; dagegen sind die Bogengrade verschieden groß bei ungleichen Kreisen.

Verschiebt man den Scheitel des Winkels μ (Fig. 105) auf der Verlängerung von AM, so nimmt der Winkel ab. Es ist $\sphericalangle$ ACB $= \mu - \sphericalangle$ DBE. Da dieser Subtrahend wächst, wenn C sich weiter von M entfernt, so wird also der Winkel immer kleiner, je mehr sich der Scheitel von M entfernt. Fällt derselbe auf die Kreislinie in F, so ist $\mu = \beta + \varphi$. Da aber MB = MF, so ist $\beta = \varphi$. Mithin $\mu = 2\varphi$, oder $\varphi = \frac{1}{2}\mu$.

Bei dem Winkel φ liegt der Mittelpunkt auf einem Schenkel von φ. Liegt dagegen der Mittelpunkt innerhalb des Peripheriewinkels (ein Peripheriewinkel ist ein Winkel, dessen Schenkel Sehnen sind), wie bei Winkel ε, oder außerhalb desselben, wie bei dem Winkel o, so ziehe man durch den Scheitel O oder E einen Durchmesser; alsdann ist ε die Summe und o die Differenz zweier Peripheriewinkel, bei welchem der Mittelpunkt auf einem Schenkel liegt. Es ergibt sich also auch in diesen Fällen $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu$ und $o = \frac{1}{2}\mu$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte von dem auf demselben oder auf gleichem Bogen stehenden Centriwinkel.

Es ist $\varepsilon = o$, und da auch die auf gleichen Bogen stehenden Centriwinkel, folglich auch ihre Hälften, gleich sind, so erhalten wir den Lehrsatz:

2. Peripheriewinkel auf demselben oder auf gleichen Bogen sind einander gleich.

Wenn die Hälften gleich sind, so sind auch die Ganzen gleich. Wenn also Peripheriewinkel gleich sind, so sind auch die zugehörigen Centriwinkel gleich. Zu gleichen Centriwinkeln aber gehören gleiche Bogen.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Gleiche Peripheriewinkel stehen auf gleichen Bogen.

Da nach § 74, 1 der ganze Bogen das Maß des zugehörigen Centriwinkels ist, so ist das Maß des Peripheriewinkels die Hälfte des zugehörigen Bogens. Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Der Peripheriewinkel hat zum Maße die Hälfte des Bogens, worauf er steht.

Aus 4 ergeben sich die Lehrsätze:

5. Der Peripheriewinkel im Halbkreise oder über dem Durchmesser ist gleich 90^0 oder R.

6. Peripheriewinkel sind supplementar, wenn die Summe der Bogen, worauf sie stehen, der ganzen Kreislinie gleich ist.

7. Zwei Peripheriewinkel auf verschiedenen Seiten einer Sehne sind supplementar.

8. Der Nebenwinkel eines Peripheriewinkels ist gleich dem Peripheriewinkel im abgewandten Kreisabschnitte.

§ 76.

Wenn man (Fig. 105) den Scheitel O auf OA verschiebt, während die Schenkel durch A und B gehen, so wird der Winkel größer, wenn wir nach A hin, kleiner, wenn wir über O hinaus verschieben ($o' > o$). Es gibt also auf jedem von A ausgehenden Strahl AE, AF u. s. w. nur einen Punkt E, F u. s. w., dessen Verbindungslinien mit A und B einen Winkel einschließen, der gleich $\sphericalangle$ o ist. Ist also $\sphericalangle\ \varepsilon = \varphi = o$, und E, F und O liegen auf derselben Seite von der Geraden AB, so muß der durch A, B und O gelegte Kreis auch durch E und F gehen.

Mithin erhalten wir den Lehrsatz:

1. Gleiche Winkel über derselben Strecke sind Peripheriewinkel desselben Kreises.

Dieser Lehrsatz läßt sich auch leicht indirekt beweisen, indem man durch drei Punkte A, B und O einen Kreis beschreibt und annimmt, derselbe ginge nicht durch E, sondern schnitte AE in E'. Alsdann wäre $\sphericalangle\ \varepsilon' = o = e$, was unmöglich, da der Außenwinkel eines Dreiecks nicht einem gegenüberliegenden Innenwinkel gleich sein kann.

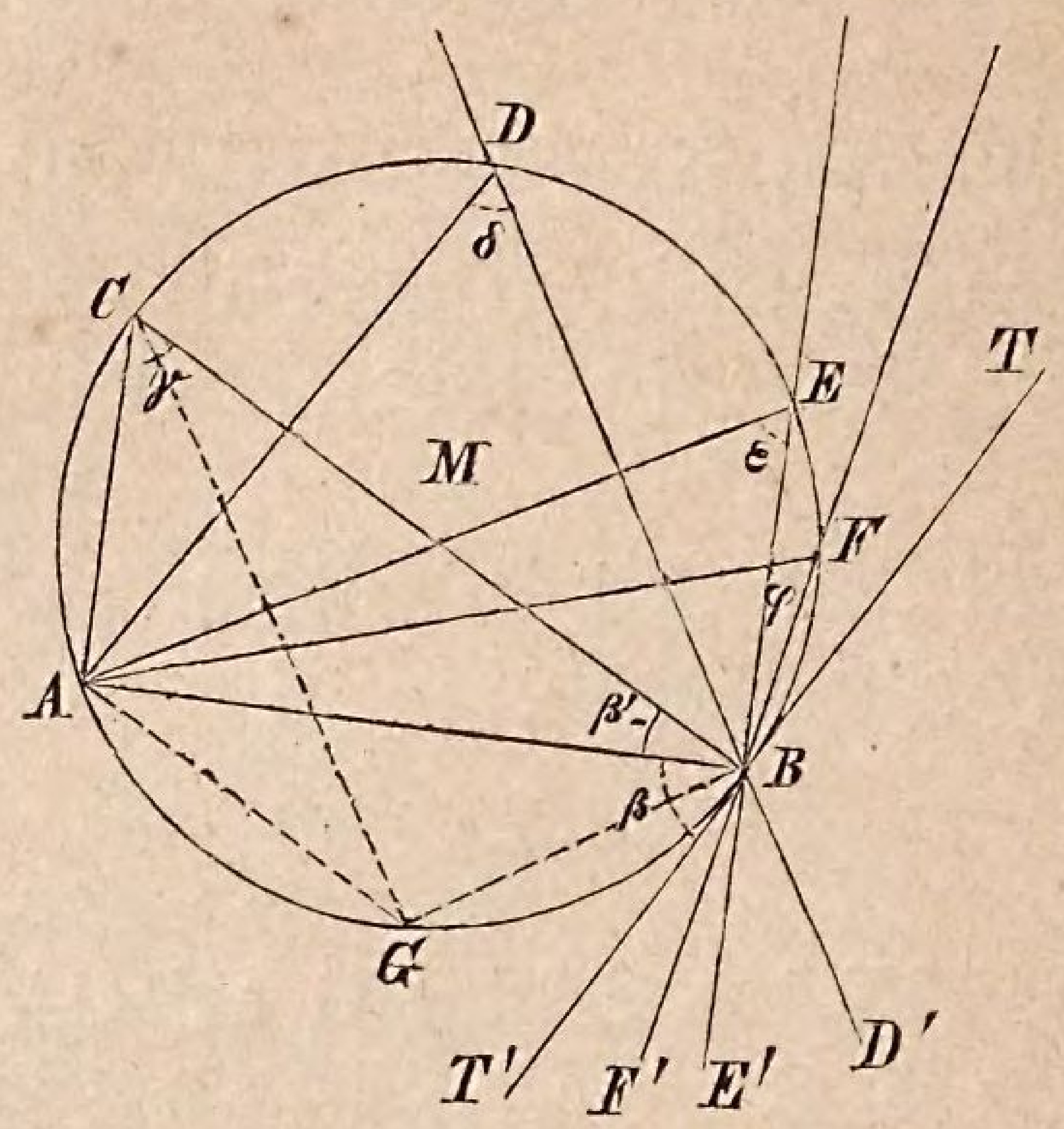
In Figur 105 ist $\sphericalangle\ o' = o + GBO$. Mithin hat o' zum Maße die Hälfte des Bogens AB vermehrt um die Hälfte des Bogens GO, also die Hälfte der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen. Dagegen ist $\sphericalangle$ H = BSJ — HBS, hat also zum Maße die Differenz der halben Bogen zwischen seinen Schenkeln.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Liegt der Scheitel eines Winkels innerhalb eines Kreises, so hat der Winkel zum Maße die halbe Summe der Bogen zwischen seinen Schenkeln; liegt der Scheitel außerhalb, so hat der Winkel zum Maße die Hälfte der Differenz der Bogen zwischen seinen Schenkeln. (Vergl. § 75, 4.)

In Fig. 106 sind nach § 75, 2 alle Peripheriewinkel über der

Fig. 106.



Sehne AB einander gleich: ∢ $\gamma = \delta = \varepsilon = \varphi$, wie weit oder nahe immer der Scheitel den Endpunkten A oder B sein mag. Rückt also der Scheitel etwa von F aus dem Punkte B immer näher, so bleibt der Peripheriewinkel doch immer von derselben Größe, also auch noch, wenn der Scheitel dem Punkte B unendlich nahe kommt; alsdann ist aber der Schenkel BT' die Tangente in B. Es ist also $\beta = \varphi = \varepsilon = \delta = \gamma$.

Es läßt sich dasselbe auch auf folgende Art beweisen: Wenn TT' Tangente und BC Durchmesser, so ist $\beta + \beta' = R$ (§ 70, 1) und $\beta' + \gamma = R$, da ∢ BAC = R (§ 75, 5). Mithin $\beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \varphi$. In Figur 106 ist ∢ AGB supplementar zu γ (Lehrs. 75, 7), ∢ ABT supplementar zu dem γ gleichen Winkel β. Mithin ist ∢ AGB = ABT. Auch mit der Hülfslinie GC läßt sich dasselbe beweisen.

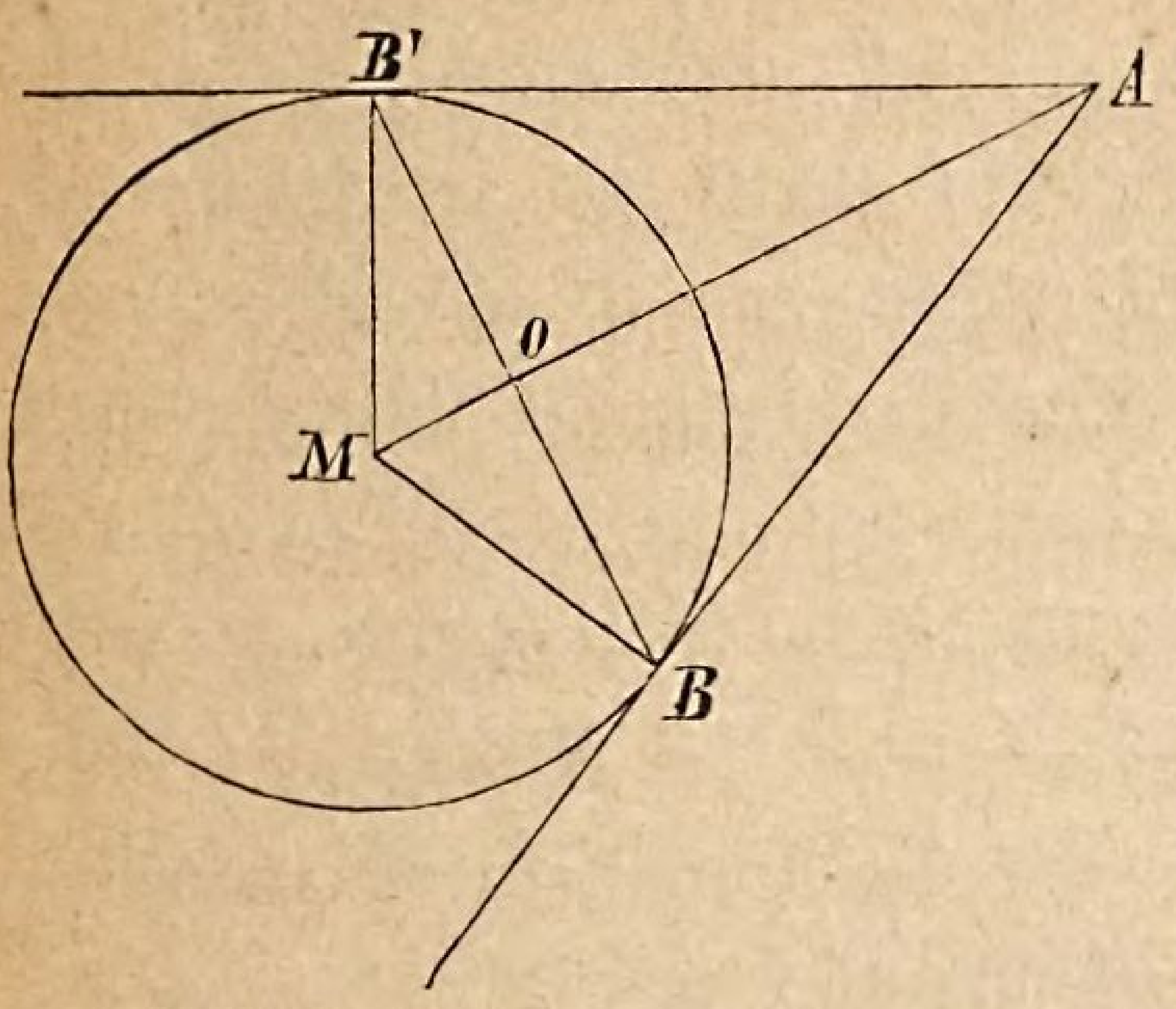
Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne im Berührungspunkte bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel im abgewandten Kreisabschnitte.

§ 77.

Wenn Figur 107 AB Tangente des Kreises ist, so ist ∢ ABM = R. Ist daher AM gegeben, so erhalte ich eine Tangente von A an den Kreis, wenn ich AM zum Durchmesser eines Kreises mache, da die Peripheriewinkel über dem Durchmesser Rechte sind. Dieser Kreis wird aber den Kreis um M in zwei Punkten B und B' treffen. Es gibt mithin von einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte A zwei Tangenten an den Kreis. Da aber in den beiden Dreiecken AMB und AMB' AM = AM', MB = MB' und ∢ ABM = R = AB'M, so ist △ ABM ≅ AB'M. Daraus folgt AB = AB', ∢ MAB = MAB',

Fig. 107.



$\sphericalangle$ BMA = B'MA. Außerdem ergibt sich: $\sphericalangle$ BMB' + BAB' = 2R, $\triangle$ AOB $\cong$ AOB'; folglich OB = OB' und AM $\perp$ BB'.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

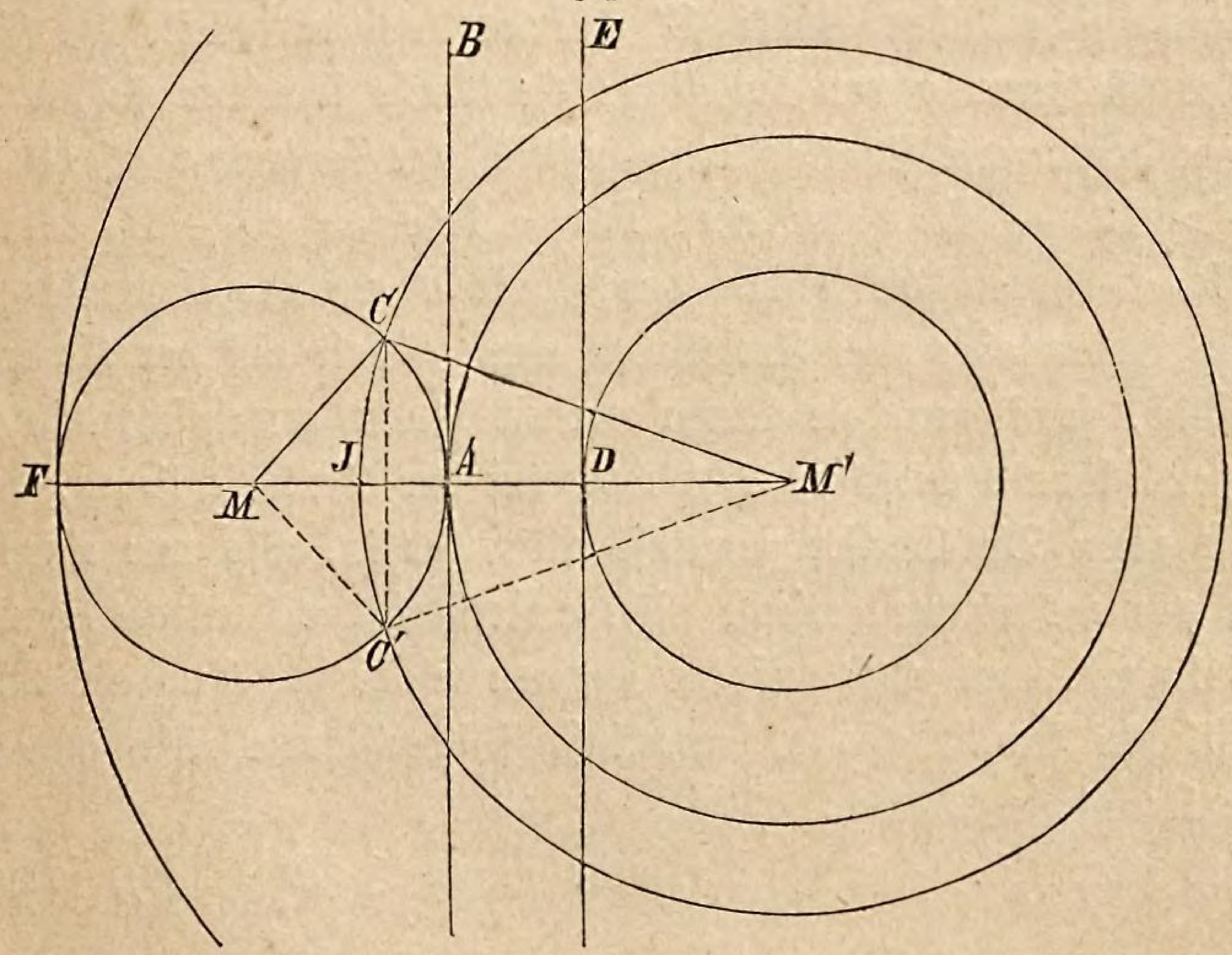
1. Von jedem Punkte außerhalb eines Kreises gibt es zwei Tangenten an den Kreis, bei welchen die Strecken zwischen Durchschnittspunkt und Berührungspunkt einander gleich sind, und die gerade Verbindungslinie des Durchschnittspunktes und des Mittelpunktes den Tangentenwinkel und den supplementaren Centriwinkel sowie die Berührungssehne halbirt, zugleich aber auf letzterer senkrecht steht.

C. Von zwei Kreisen.

§ 78.

Da ein Kreis durch zwei Punkte bestimmt ist, so können zwei verschiedene Kreislinien zwei, einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Welcher dieser Fälle eintritt, hängt offenbar von der Entfernung der beiden Mittelpunkte, der sogenannten Centrale, in ihrer Beziehung zur Größe der Radien ab. Es seien (Fig. 108) M und M' die beiden Mittelpunkte, R und R' die Radien zweier Kreise.

Fig. 108.



Ich schneide nun von der Centrale $c = MM'$ von M aus eine Strecke $MA = R$ ab, die kleiner als c sein soll, und errichte in A auf MM' eine Senkrechte AB. Alsdann ist A ein Punkt des Kreises um M, dagegen sind alle anderen Punkte von AB weiter von M als $MA = R$ entfernt, und weiter von M' als $M'A$. Der Kreis um M mit dem Radius $R = MA$ bleibt also links von AB und hat mit der Geraden AB nur den Punkt A gemeinschaftlich. Ist nun $R' = M'D$ kleiner als $M'A$ oder $(c - R)$, so liegt der Kreis um M' mit dem Radius R' rechts von der Senkrechten DE, kann also mit dem Kreise um M, wofern dessen Radius $R = MA$ ist, keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Ist dagegen $R' = M'A = c - R$, sind also $R + R' = c$, so liegt der Kreis um M ganz links, der Kreis um M' ganz rechts von der Senkrechten AB, haben aber den auf der Centrale liegenden Punkt A der Senkrechten gemeinschaftlich, sie berühren sich, d. h. sie haben nur einen Punkt gemeinschaftlich.

Wenn aber $R' > (c - R)$, und man schneidet von $M'M$ die Strecke $M'J = R'$ ab, wobei aber $M'J$ kleiner als $M'F$ oder $(c + R)$ sein muß, so liegt der Punkt J innerhalb des Kreises um M. Die Kreislinie um M' muß also, da M' außerhalb des Kreises um M liegt, die Kreislinie um M wenigstens in einem Punkte treffen, der aber nicht auf MM' liegen kann. Es sei im Punkte C. Verbinden wir nun C mit M und M', so können wir dieses Dreieck um MM' umschlagen. In der neuen Lage heiße es $MC'M'$. Beide Kreislinien haben also auch einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt C' auf der anderen Seite der Centrale in gleicher Entfernung von derselben: die Kreise schneiden sich, d. h. die Kreislinien haben zwei Punkte gemeinschaftlich, die Centrale $c < (R + R')$, aber $c > R' - R$. Ist aber $R' = M'F = c + R$, oder $c = R' - R$, so haben die Kreise den Punkt F auf der Centrale gemeinschaftlich. Haben aber zwei Kreislinien einen Punkt auf der Centrale gemeinschaftlich, so können sie keinen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben; denn erstens könnte derselbe nicht auch auf der Centrale liegen, da sonst die Kreise einen Durchmesser gemeinschaftlich hätten, also nur einen Kreis bildeten; zweitens könnte derselbe nicht außerhalb der Centrale liegen, weil die Kreislinien dann auch auf der anderen Seite der Centrale einen gemeinschaftlichen Punkt, also drei gemeinschaftliche Punkte hätten und mithin nur eine Kreislinie bildeten.

Wird aber $R' > (c + R)$, oder ist $c < (R' - R)$, so liegt der

Kreis um M ganz in dem Kreise um M', die Kreislinien haben keinen Punkt gemeinschaftlich.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Haben zwei Kreise einen Punkt außerhalb der Centrale gemeinschaftlich, so haben sie in gleicher Entfernung auf der anderen Seite der Centrale einen zweiten Punkt gemeinschaftlich, d. h. sie schneiden sich. Die Centrale ist kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien.

2. Haben zwei Kreise einen Punkt auf der Centrale gemeinschaftlich, so berühren sie sich entweder von außen oder von innen. Im ersten Falle ist die Centrale gleich der Summe, im zweiten gleich der Differenz der Radien.

3. Liegen zwei Kreise ganz außer einander, so ist die Centrale größer als die Summe der Radien; liegt der eine ganz in dem andern, so ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien.

4. Ist die Centrale größer als die Summe der Radien, so liegen die Kreise ganz außer einander.

5. Ist die Centrale gleich der Summe der Radien, so berühren sich die Kreise von außen.

6. Ist die Centrale kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien, so schneiden sich die Kreise.

7. Ist die Centrale gleich der Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von innnen.

8. Ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien, so liegt der eine ganz in dem anderen.

Berühren sich die Kreise von außen, so ist der Radienwinkel gleich 2R, die gemeinschaftliche Sehne gleich Null, die Centrale gleich der Summe der Radien. Nimmt der Radienwinkel ab, so wächst die gemeinschaftliche Sehne, das Quadrat der Centrale ist größer als die Summe der Quadrate der Radien, bis der Radienwinkel gleich einem Rechten wird. In diesem Falle ist $c^2 = R^2 + R'^2$, oder $R^2 = c^2 - R'^2 = (c + R')(c - R')$. Wird der Radienwinkel kleiner als R, so wird $c^2 < R^2 + R'^2$, um mit dem Radienwinkel gleich Null zu werden. Die gemeinschaftliche Sehne hingegen wächst mit abnehmendem Radienwinkel, bis der Mittelpunkt des kleineren Kreises in dieselbe fällt, sie also Durchmesser desselben wird. Wenn der Radienwinkel der sich bis dahin schneidenden Kreise Null wird, so berühren sich die Kreise von innen.

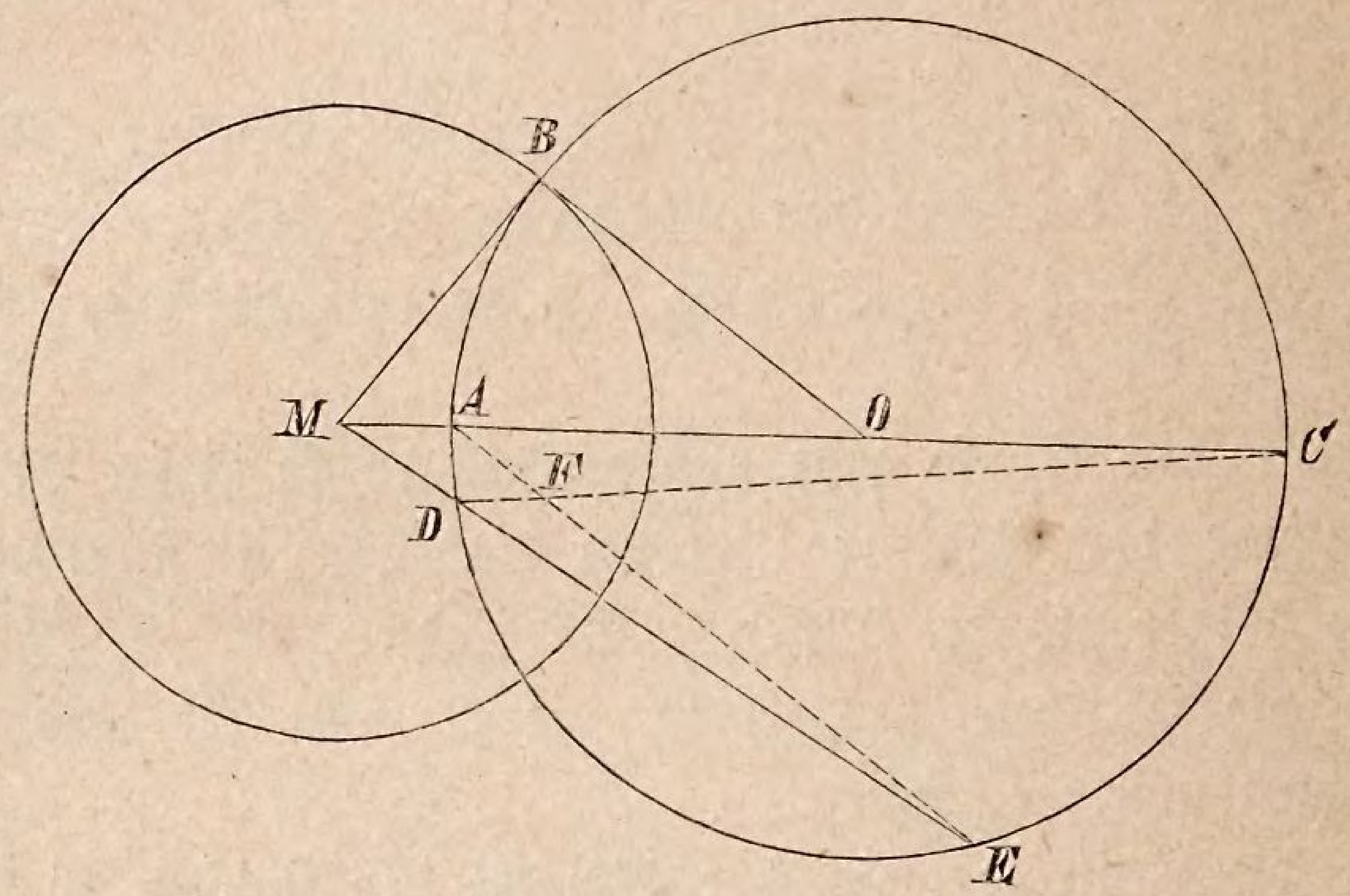
Vom Kreise und mehreren Geraden.

A. Der Kreis und zwei Geraden.

§ 79.

Wir haben (§ 78) gesehen, daß, wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, d. h. die Radien nach den Durchschnittspunkten Rechte bilden,

Fig. 109.



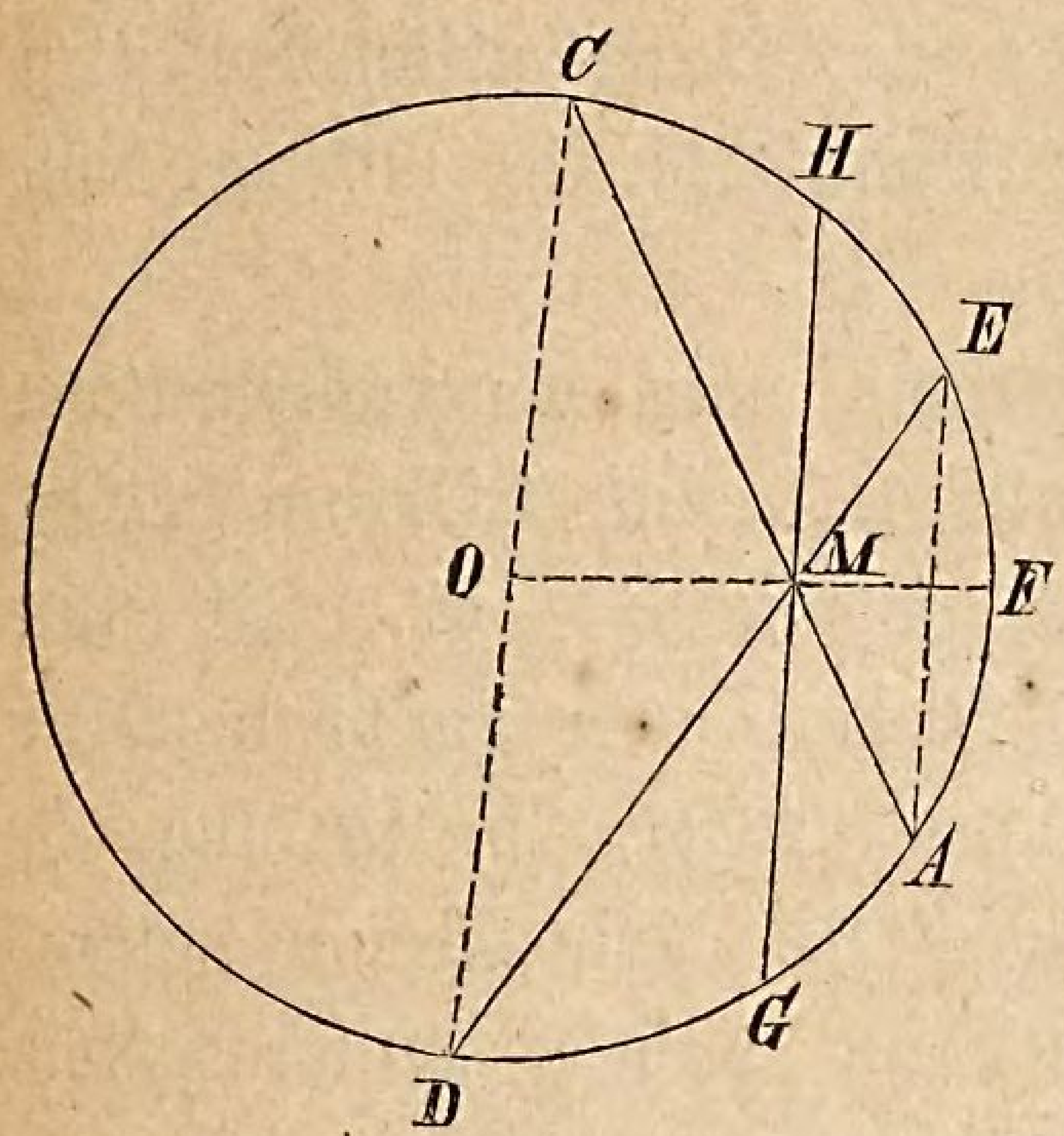
$R^2 = c^2 - R'^2 = (c + R')(c - R') = MC \cdot MA$ ist. Ziehen wir nun durch M eine andere Sekante ME an den Kreis um O, so ist zwar $ME < MC$, aber $MD > MA$ (§ 72, 1). Um nun die vier Strecken MC, ME, MA, MD mit einander zu vergleichen, bringen wir sie in Dreiecke, indem wir D mit C und E mit A verbinden. Alsdann ist in den beiden Dreiecken MAE und MDC der Winkel CME gemeinschaftlich, und $\sphericalangle C = E$, weil beide auf dem Bogen AD stehen. Mithin Dreieck $MAE \sim MDC$. Folglich $MC : ME = MD : MA$. Mithin $ME \cdot MD = MC \cdot MA = MB^2$. Das Vorhergehende ist unabhängig von der besonderen Lage der beiden Sekanten MC und ME.

Im Wesentlichen haben wir dasselbe bei zwei sich schneidenden Sehnen (Fig. 110). Auch hier ist $\sphericalangle DMC = EMA$, $\sphericalangle C = E$; mithin $\triangle MAE \sim MDC$. Folglich auch $MC : ME = MD : MA$. Mithin auch hier $MC \cdot MA = ME \cdot MD$. Ziehen wir durch M den Radius OF und die auf diesem senkrecht stehende Sehne HG, so ist $MG = MH$ und mithin $MC \cdot MA = ME \cdot MD = MG^2$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Zieht man durch irgend einen Punkt in der Ebene eines Kreises gerade Verbindungslinien nach der Kreislinie, so fallen je zwei in eine Gerade

Fig. 110.



und bilden ein constantes Produkt, welches dem Quadrate der Verbindungslinie gleich ist, die in ihrem Anfangs- oder Endpunkte auf dem Radius senkrecht steht.

Würde man (Fig. 110) auch A mit D und E mit C verbinden, so erhielte man ein Sehnen- oder Kreis-Viereck.

Wenn (Fig. 109)

$$MD \cdot ME = MB^2 \text{ und (Fig. 110)}$$

$$MA \cdot MC = MG^2,$$

so nennt man MB^2 in Figur 109 und MG^2 in Figur 110 die Potenz des Punktes M in Beziehung auf den Kreis O. Nennt man den Abstand des Punktes M vom Mittelpunkte O, also MO, e, die Potenz p und den Radius des Kreises O r, so ist

$$p = e^2 - r^2.$$

Der Werth von p ist positiv, wenn der Punkt wie in Figur 109 außerhalb, dagegen negativ, wenn er wie in Figur 110 innerhalb des Kreises liegt. Im ersten Falle heißt die Potenz eine äußere, im zweiten eine innere. Die innere ist negativ, weil die beiden Abschnitte sich von dem Punkte aus in entgegengesetzter Richtung erstrecken.

B. Der Kreis und drei Geraden.

a) Der Kreis und drei Sehnen.

§ 80.

Da sich um jedes Dreieck ein Kreis construiren läßt (§ 71), so ist jedes Dreieck ein Sehnendreieck. Um Beziehungen zwischen Dreieck und Radius oder Durchmesser des umgeschriebenen Kreises zu finden, ziehen wir den Durchmesser CE (Fig. 111). Verbinden wir nun E mit A, so ist $\triangle$ EAC bei A rechtwinklig und $\sphericalangle\, \varepsilon = \beta$. Es ist also $\triangle$ AEC $\sim$ DBC. Mithin: CE : CA = CB : CD, oder

$$2r : b = a : h_c.$$

$$2r \cdot h_c = a \cdot b. \text{ Mithin:}$$

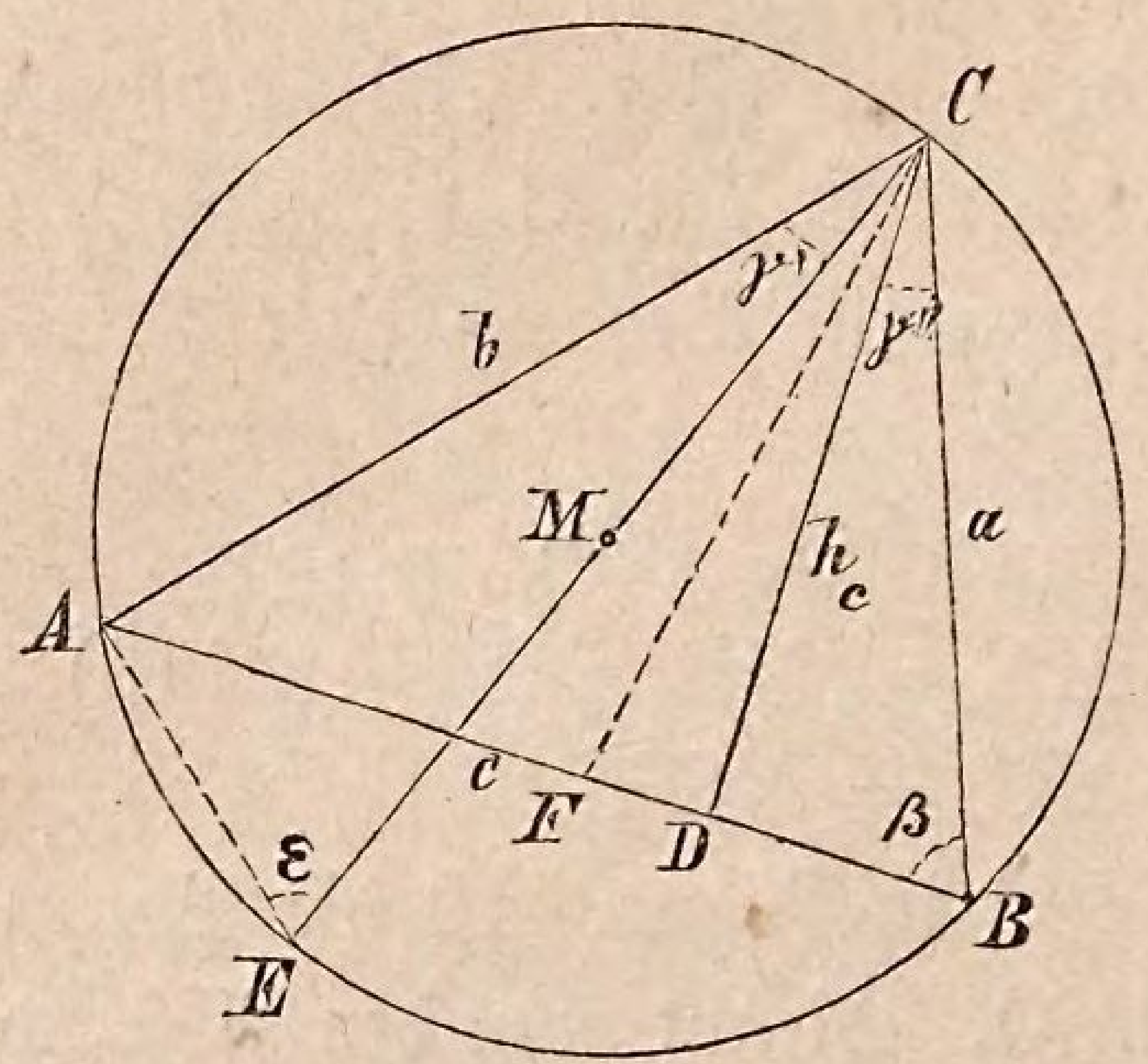
$$2r \cdot c \cdot h_c = a \cdot b \cdot c, \text{ oder}$$

$$4r \cdot \triangle ABC = a \cdot b \cdot c.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. In jedem Dreiecke ist das Produkt zweier Seiten gleich dem Produkte zwischen dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und der Höhe zur dritten Seite.

Fig. 111.



Vergleicht man die rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecke ACE und DCB, so ergibt sich $\gamma' = \gamma''$. Ist nun CF die Mediale oder Halbirungslinie des Winkels ACB, so ist auch ∢ ECF = FCD. Die Mediale halbirt also auch den Winkel zwischen Höhe und Durchmesser.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

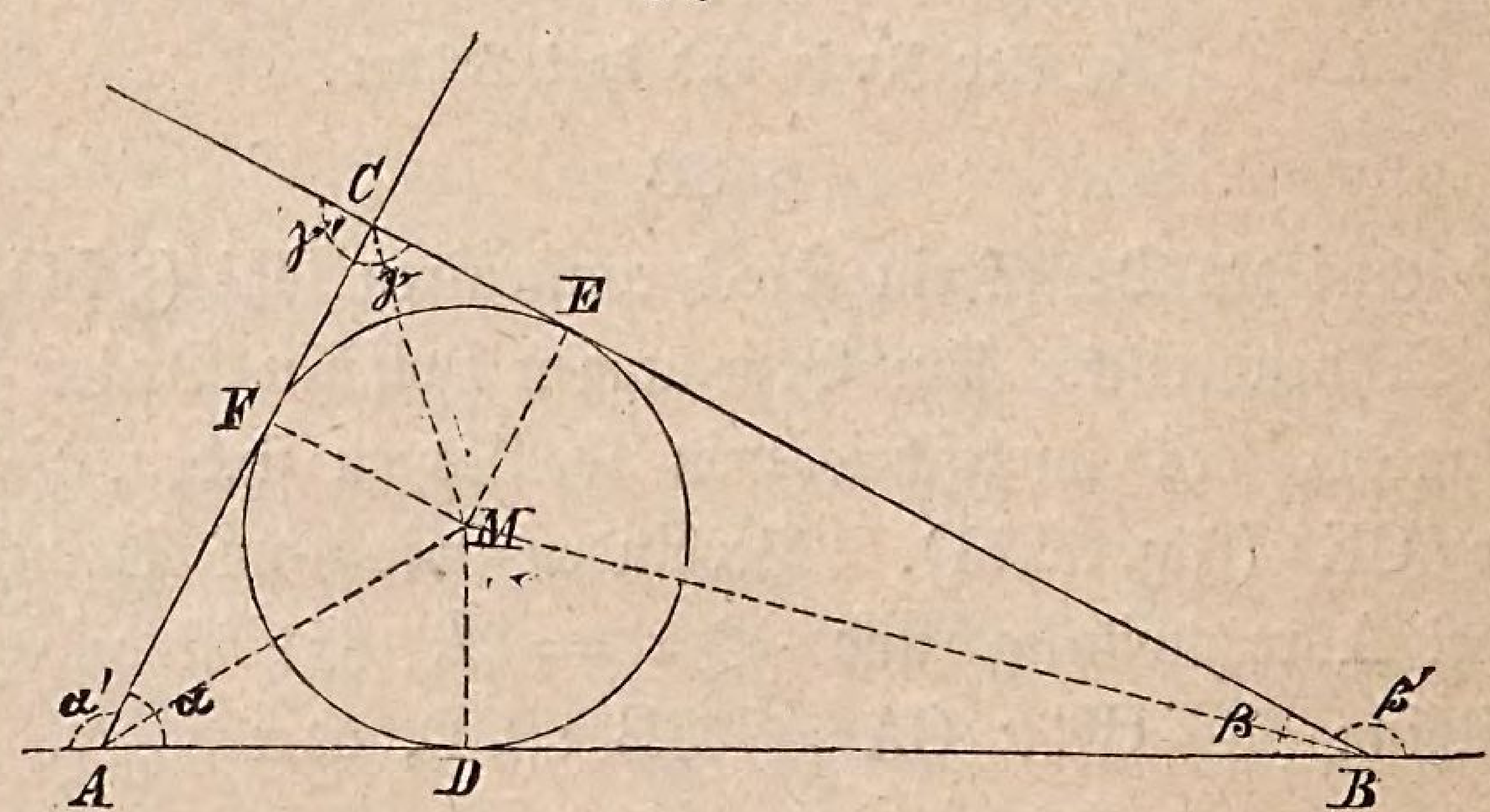
2. Zieht man von derselben Dreiecksecke aus Höhe, Mediale und Durchmesser des umgeschriebenen Kreises, so bilden Höhe und Durchmesser mit der Mediale sowie auch mit den beiden Seiten der Ecke gleiche Winkel.

β) Der Kreis und drei Tangenten.

§ 81.

Zieht man durch drei beliebige Punkte einer Kreislinie Tangenten, so bilden dieselben ein Tangentendreieck, ein dem Kreise umgeschriebenes Dreieck, während der Kreis dem Dreiecke eingeschrieben ist.

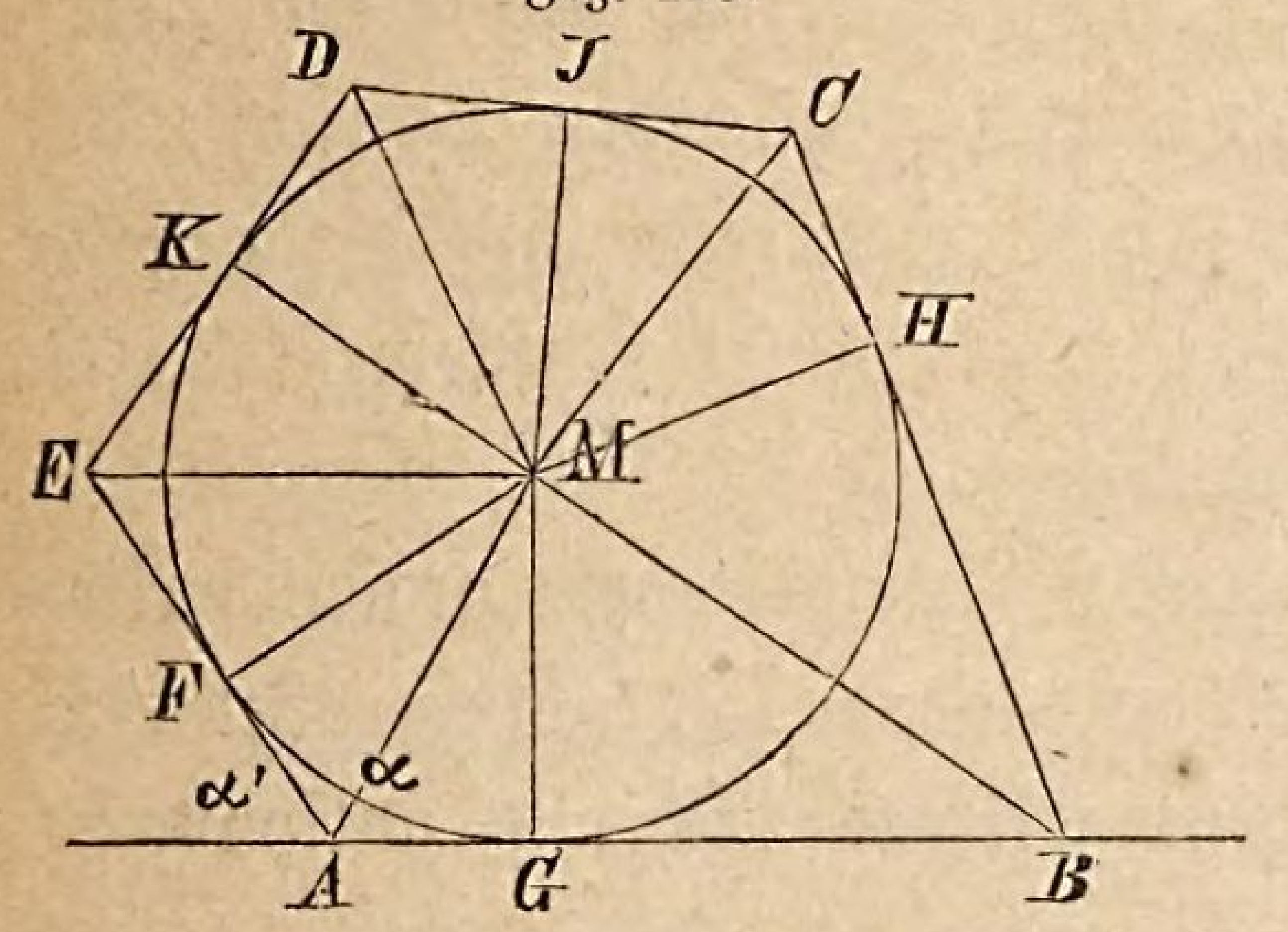
Fig. 112.



Da Figur 112 die Senkrechten MD, ME und MF als Radien des Kreises M gleich sind, so ist AF = AD, CF = CE, BE = BD, und die Winkel α, β und γ werden durch AM, BM und CM halbirt. α ist

mit ∢ FMD, β mit ∢ EMD, γ mit ∢ EMF supplementar, mithin ist der Außenwinkel $\alpha' =$ FMD, $\beta' =$ EMD, $\gamma' =$ EMF. Da $\alpha +$ ∢ FMD = 2R, so haben sie zum Maße die Hälfte des Kreisumfangs. ∢ FMD hat zum Maße Bogen FD, also hat α zum Maße die Hälfte der Differenz zwischen Bogen FED und FD.

Fig. 113.



Das Vorhergehende gilt von jedem einem Kreise umgeschriebenen Vielecke (Fig. 113).

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Die Medialen eines Kreis-Tangentenvielecks schneiden sich in dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis einbeschreiben.

2. Jeder Winkel hat zum Maße die Hälfte der Differenz der Kreis-Bogen, welche zwischen den Berührungspunkten eines die beiden Schenkel berührenden Kreises liegen.

3. Jeder Winkel hat zum Maße den zugewandten Bogen jedes die Schenkel seines Nebenwinkels berührenden Kreises.

4. Die Schenkel eines Winkels theilen alle Kreislinien der sie berührenden Kreise in demselben Verhältnisse.

5. Im Kreis-Tangentenvielecke ist jede Seite gleich der Summe der anliegenden Abschnitte der Nachbarseiten.

C. Der Kreis und vier oder mehr Geraden.

α. Der Kreis und vier Sehnen, das Kreisviereck.

§ 82.

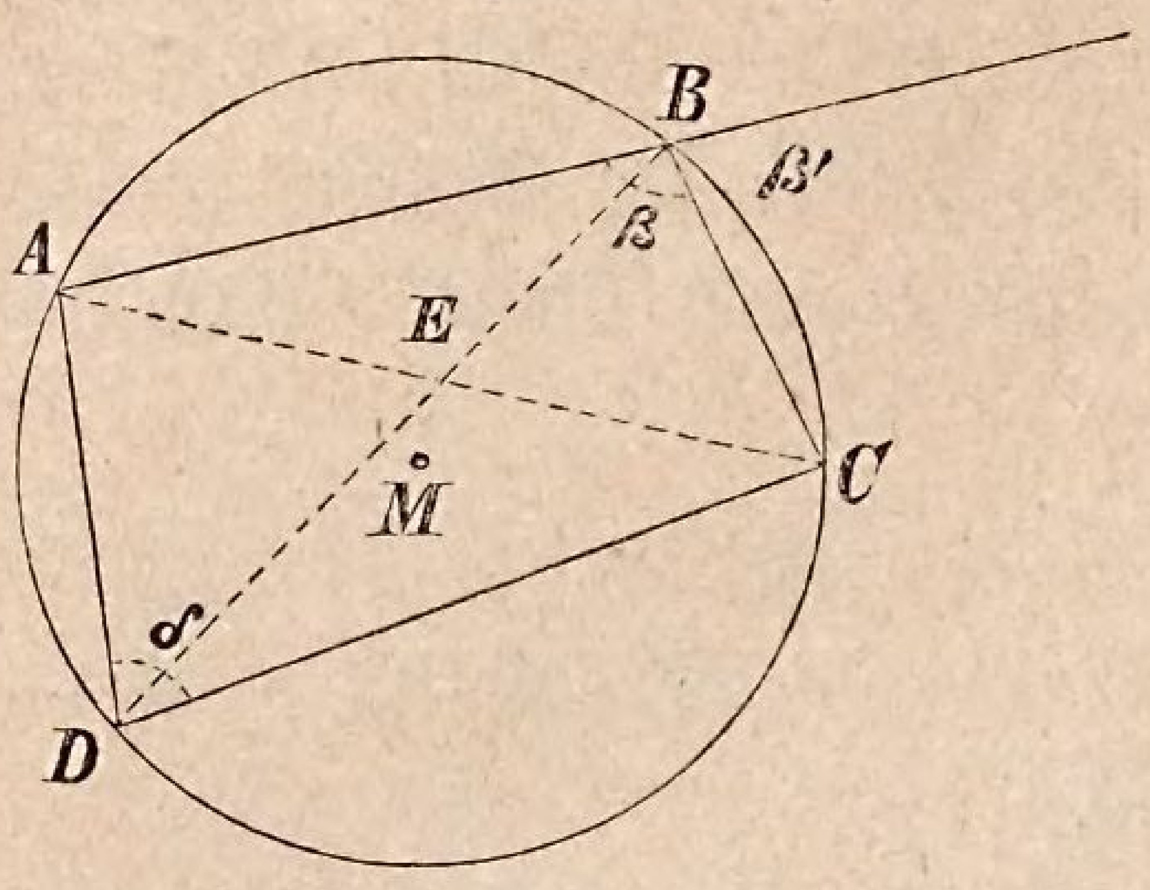
Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen sind, welches also einem Kreise eingeschrieben ist, heißt Sehnen- oder Kreisviereck (§ 79). Nach § 79, 1 ist AE·EC = BE·ED (Fig. 114).

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Im Kreisvierecke schneiden sich die Diagonalen so, daß das Produkt aus den Abschnitten der einen gleich ist dem Produkte aus den Abschnitten der anderen.

Untersuchen wir die Winkel des Sehnenvierecks. Dieselben sind Pe-

Fig. 114.



ripheriewinkel. β hat zum Maße $\frac{1}{2}$ Bogen ADC. δ hat zum Maße $\frac{1}{2}$ Bogen CBA, mithin hat die Summe $(\beta + \delta)$ zum Maße die Hälfte der ganzen Kreislinie, ist also gleich 2R.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Im Kreisvierecke sind die gegenüberliegenden Winkel supplementar.

Aus 2 folgt $\beta' = \delta$. Wir erhalten also:

3. Jeder Außenwinkel eines Kreisvierecks ist gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel. (Man hat deßhalb unpassend BC antiparallel AD genannt, während wir Linien von entgegengesetzter Richtung antiparallel nennen.)

Da es auf derselben Seite von A auf AD nur einen Punkt D gibt, so daß $\sphericalangle$ ADC supplementar zu β, so läßt Lehrsatz 2 sich umkehren:

4. Wenn in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Winkel supplementar sind, so ist das Viereck ein Kreisviereck.

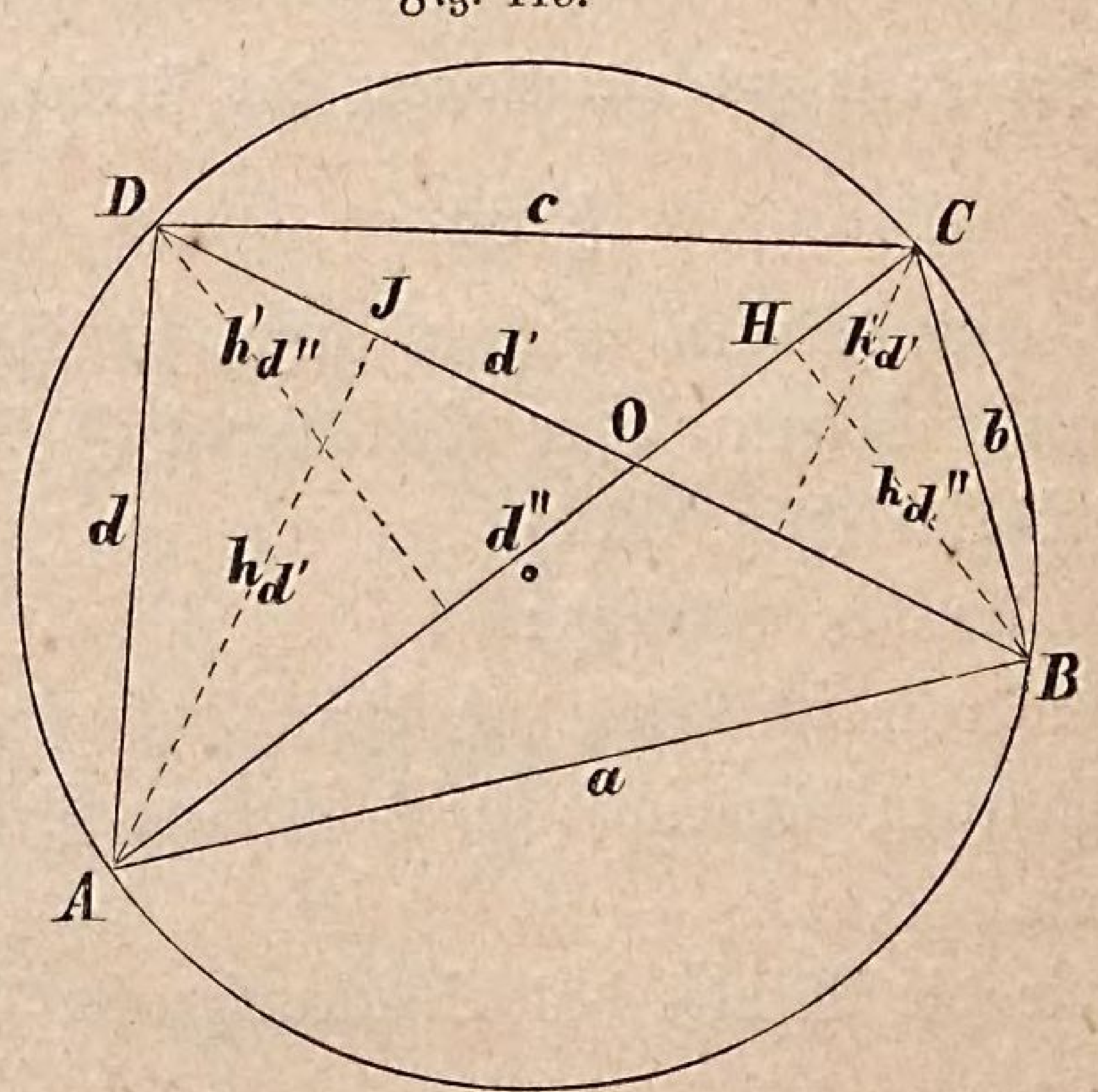
Es läßt sich dieser Satz leicht indirekt beweisen:

Wenn in einem Viereck ABCD $\beta + \delta = 2R$, so legen wir durch A, B und C einen Kreis. Ginge dieser nicht durch D, sondern durch D', so wäre δ' supplementar zu β, folglich $= \delta$; es wäre also ein Dreiecksaußenwinkel gleich einem gegenüberliegenden Innenwinkel, was unmöglich ist.

§ 83.

Um den Inhalt des Kreisvierecks zu erhalten, müssen wir dasselbe in Dreiecke zerlegen.

Fig. 115.



Es ist (Fig. 115) $\square$ ABCD $= \frac{1}{2}d'' (h_{a''} + h'_{a''}) = \frac{1}{2}d' (h_{a'} + h'_{a'})$, wenn d'' und d' die Diagonalen und $h_{a''}$ die eine Höhe auf der Diagonale d'' u. s. w. bedeuten.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß $d'' (h_{a''} + h'_{a''}) = d' (h_{a'} + h'_{a'})$. Mithin:

$$d'' : d' = (h_{a'} + h'_{a'}) : (h_{a''} + h'_{a''}).$$

Es ist aber: $h_{a'} : h'_{a'} = \triangle ABD : \triangle BCD$, und mithin, da $\alpha + \gamma = 2R$, $h_{a'} : h'_{a'} = a \cdot d : b \cdot c$.

Folglich $(h_{a'} + h'_{a'}) : (ad + bc) = h_{a'} : ad$. Ebenso ergibt sich: $(h_{a''} + h'_{a''}) : (ab + cd) = h_{a''} : ab$.

Mithin: $$\frac{h_{a'} + h'_{a'}}{h_{a''} + h'_{a''}} : \frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{h_{a'}}{h_{a''}} : \frac{d}{b}.$$

Nun ist aber $\triangle ADJ \sim \triangle CBH$; mithin $\frac{h_{a'}}{h_{a''}} = \frac{d}{b}$; also auch $\frac{h_{a'} + h'_{a'}}{h_{a''} + h'_{a''}} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$. Es ist daher nach dem Obigen $\frac{d''}{d'} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

Dasselbe ergibt sich, wenn wir beachten, daß $\triangle AOB \sim DOC$ und $\triangle BOC \sim AOD$. Aus der Aehnlichkeit der beiden ersten ergibt sich: $AO : OD = a : c$. Aus der Aehnlichkeit der beiden letzten: $BO : AO = b : d$.

Mithin: $BO : OD = ab : cd$. Folglich durch Addition: $d' : (ab + cd) = BO : ab$.

Ferner ist: $AO : BO = d : b$,
$BO : OC = a : c$.

Also: $AO : OC = ad : bc$. Folglich durch Addition: $d'' : (ad + bc) = AO : ad$. Es ist aber auch: $d' : (ab + cd) = BO : ab$. Mithin:

$$\frac{d''}{d'} : \frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{AO}{BO} : \frac{d}{b}.$$

Da aber $\frac{AO}{BO} = \frac{d}{b}$, so ist auch $\frac{d''}{d'} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

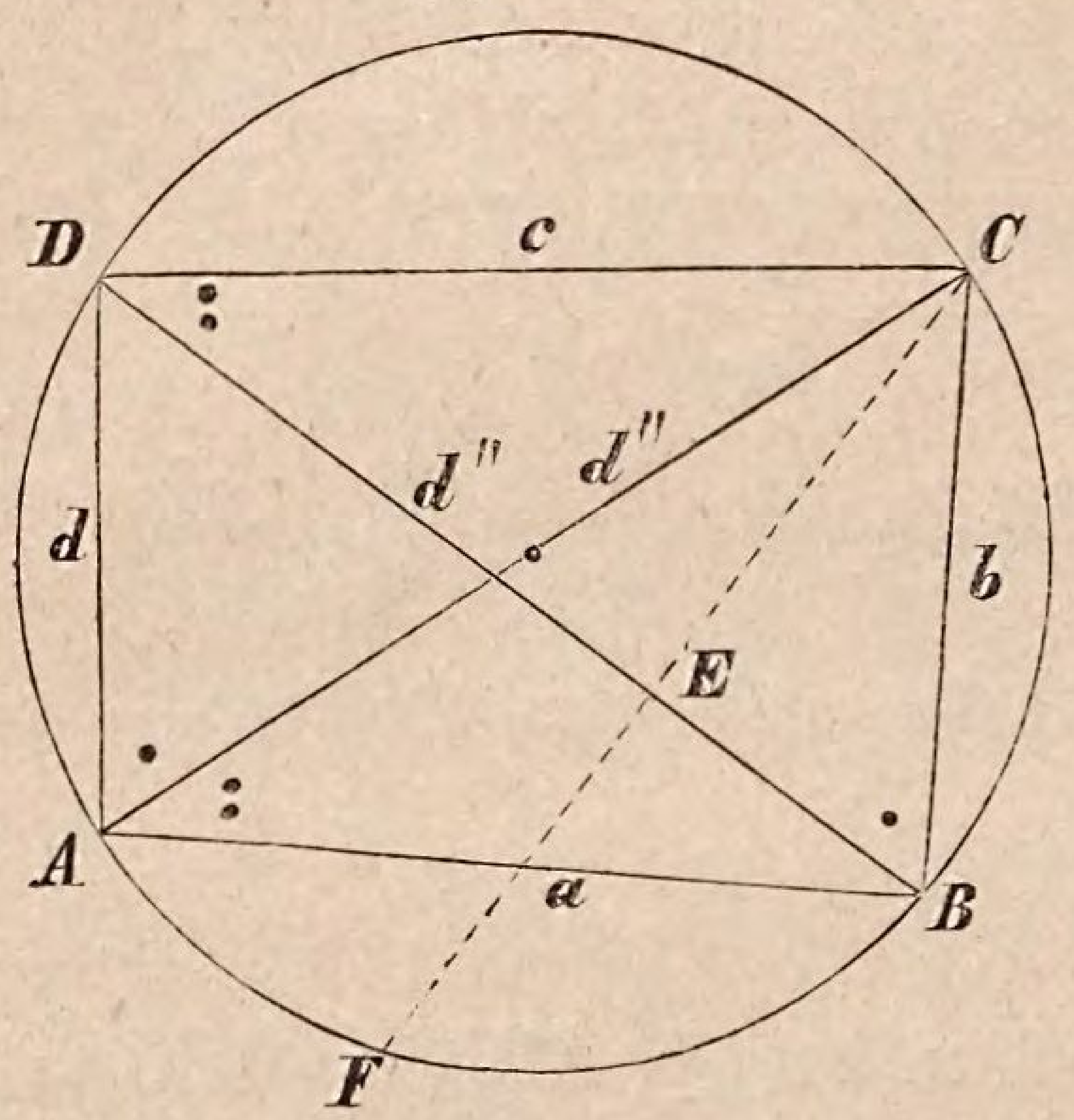
Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Im Kreisvierecke ist das Verhältniß der Diagonalen gleich dem

Verhältnisse der Summen der Produkte aus je zwei in den Endpunkten derselben Diagonale zusammenstoßenden Seiten.

Während man, um die Gleichheit zweier Strecken, die nicht in demselben Dreiecke liegen, zu beweisen, dieselben als entsprechende Seiten in congruenten Dreiecken darzuthun sucht, bringt man mehr als zwei Strecken, um ihre Beziehung kennen zu lernen, in ähnliche Dreiecke. Wir wenden daher dieses Verfahren an, um zu sehen, ob es noch andere Beziehungen zwischen Diagonalen und Seiten des Kreisvierecks gibt.

Fig. 116.



Da nun Figur 116 ∢ DAC = DBC, so erhalten wir ein △ DAC ähnliches Dreieck EBC, wenn wir Bogen BF gleich Bogen DA machen. Es ist daher d . d″ = EB : b; folglich bd = d″ · EB.

Es ist ferner △ DEC ∼ ABC; folglich c : DE = d″ : a; daher ac = d″ · DE. Wir erhalten also: ac + bd = d″ (DE + EB), oder ac + bd = d″d′.

Es ergibt sich mithin der Lehrsatz:

2. Im Kreisvierecke ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks (Ptolemäischer Lehrsatz).

β. Der Kreis und vier Tangenten, das Kreis-Tangentenviereck.

§ 84.

Vom Tangentenvierecke des Kreises gelten die Lehrsätze 1, 2, 3, 4, 5 in § 81. Aus § 81, 5 aber ergibt sich, daß (AB + CD) = (BC + DA) (Fig. 117).

Aus Figur 112 und 113 ergibt sich leicht, daß eine ähnliche Beziehung für das umschriebene Dreieck, Fünfeck, überhaupt für das dem Kreise umschriebene Vieleck von ungerader Seitenzahl nicht besteht. Nehmen wir dagegen ein Kreis-Tangentenvieleck von gerader Seitenzahl (Fig. 118), so ergibt sich, wenn G, H, J, K, L, N die Berührungspunkte sind:

AG = AN; GB = BH; CJ = CH; JD = DK; EL = EK;

Fig. 117.

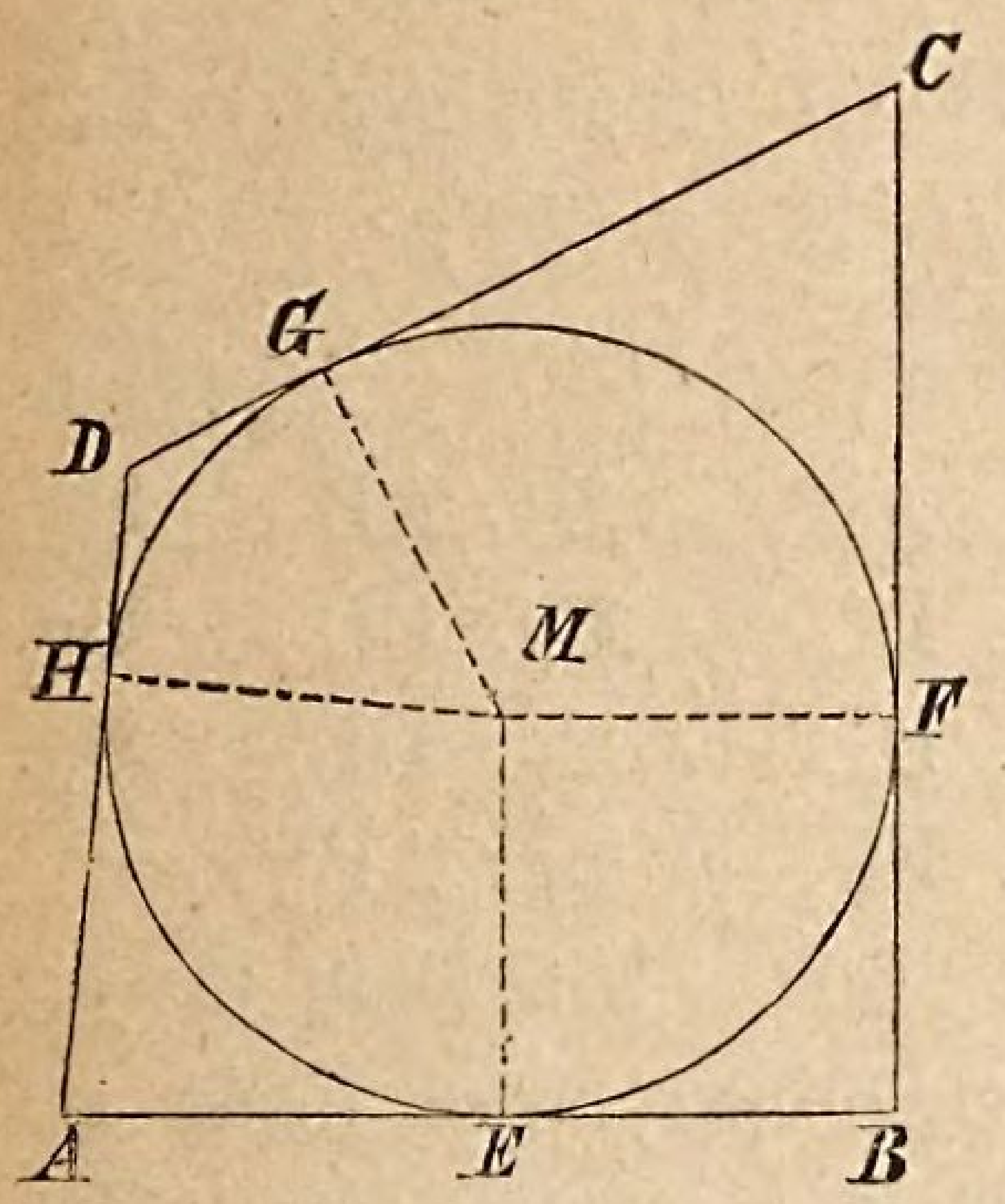
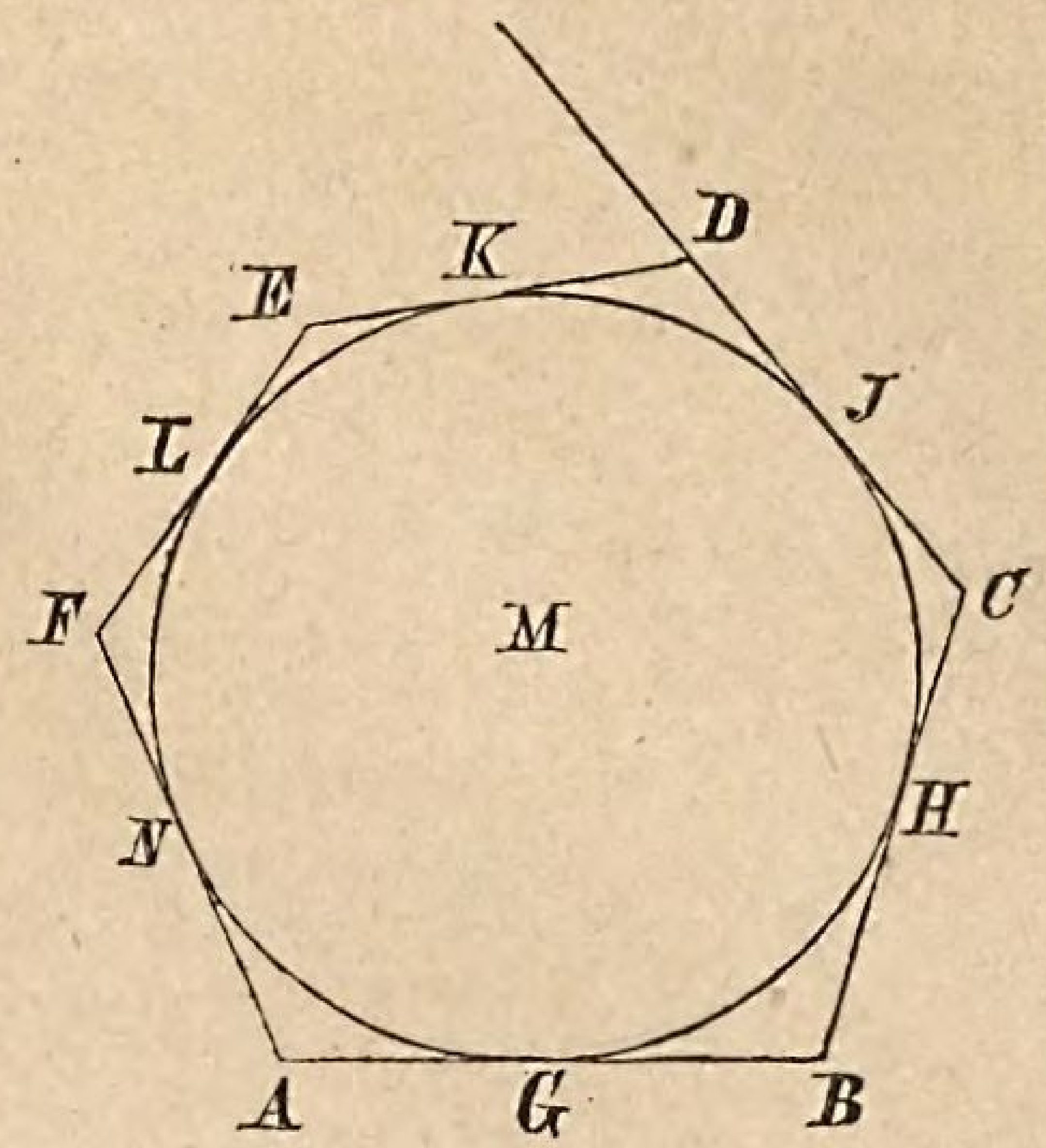


Fig. 118.



LF = FN. Mithin (AG + GB) + (CJ + JD) + (EL + LF) = AN + (BH + CH) + (DK + EK) + FN, oder AB + CD + EF = BC + DE + FA.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Bei jedem Kreistangentenvielecke von gerader Seitenzahl sind die Summen der nicht auf einander folgenden Seiten einander gleich.

Da es von einem Punkte C, wenn AD, AB und BC Tangenten des Kreises um M (Fig. 117) sind, außer CD und CB keine Tangenten an den Kreis um M gibt, drei Seiten eines Vierecks aber immer zu Tangenten eines Kreises gemacht werden können, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der beiden Medialen der von den drei Seiten gebildeten Viereckswinkel ist, so läßt sich 1 für das Viereck umkehren:

2. Wenn in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, so läßt sich demselben ein Kreis einbeschreiben.

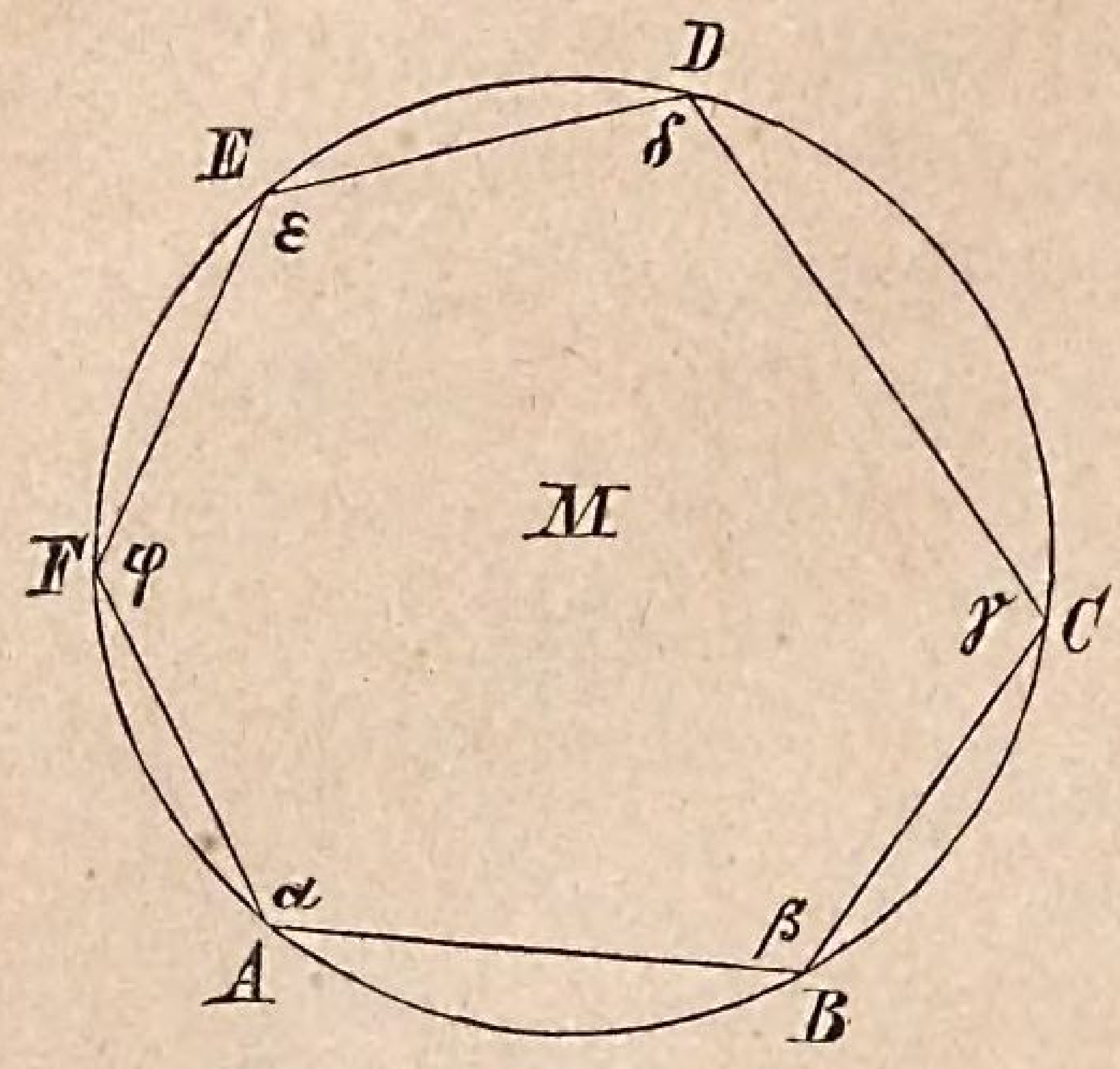
Dieser Lehrsatz läßt sich leicht indirekt beweisen, indem man an drei Seiten des Vierecks einen berührenden Kreis legt und nun vom Endpunkte der dritten Seite sich eine Tangente gezogen denkt, die nicht mit der vierten Seite zusammenfiele.

γ. Der Kreis und das eingeschriebene Vieleck.

§ 85.

Betrachten wir das Sehnenvieleck, so bietet sich noch das Maß der Winkel der Betrachtung dar. Der Bogen, worauf ein Peripheriewinkel α (Fig. 119) steht, ist gleich der ganzen Kreislinie vermindert um die den Schenkeln des Winkels zugehörigen Bogen.

Fig. 119.



Es hat also α zum Maße $180^0 - \frac{1}{2}$(Bogen AB + Bogen AF). Das Maß von $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi)$ ist also $6 \cdot 180^0 - \frac{1}{2}$[Bog. AB + Bg. AF + Bg. AB + Bg. BC + Bg. BC + Bg. CD + Bg. CD + Bg. DE + Bg. DE + Bg. EF + Bg. EF + Bg. AF] $= 6 \cdot 180^0 - 360^0$. Als Maß für die Summe der Winkel dieses nEcks erhalten wir also $n \cdot 180^0 - 360^0 = 2nR - 4R$, was wir schon früher bewiesen haben.

Im zweiten Faktor des Subtrahends erhielten wir oben jeden Bogen des Kreises doppelt. Einfach werden wir ihn erhalten, wenn wir die nicht aufeinander folgenden Winkel nehmen. Hierbei kommen dann aber nur bei gerader Seitenzahl alle Bogen vor. Ist also n eine gerade Zahl, so erhalten wir als Maß für $\frac{n}{2}$ nicht auf einander folgende Winkel $\frac{n}{2} \cdot 180^0$ vermindert um die halbe Kreislinie; z. B. (Fig. 119) haben $(\alpha + \gamma + \varepsilon)$ zum Maße ($180^0 - \frac{1}{2}$Bg. FAB + $180^0 - \frac{1}{2}$Bg. BCD + $180^0 - \frac{1}{2}$Bg. DEF) $= 3 \cdot 180^0 - 180^0$. Dasselbe Maß erhalten wir für $(\beta + \delta + \varphi)$. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Im Kreissehnenvielecke von gerader Seitenzahl sind die Summen der abwechselnden Winkel einander gleich.

δ. Der Kreis und das regelmäßige Vieleck.

§ 86.

Im regelmäßigen Vielecke sind Seiten und Winkel einander gleich. Ein solches Vieleck ist z. B. das gleichseitige Dreieck, sowie das Quadrat. Da aber in jedem nEck die Summe der Winkel $(2n - 4)$ R beträgt, so ist in jedem regelmäßigen nEcke jeder Winkel $\frac{2n - 4}{n}$ R.

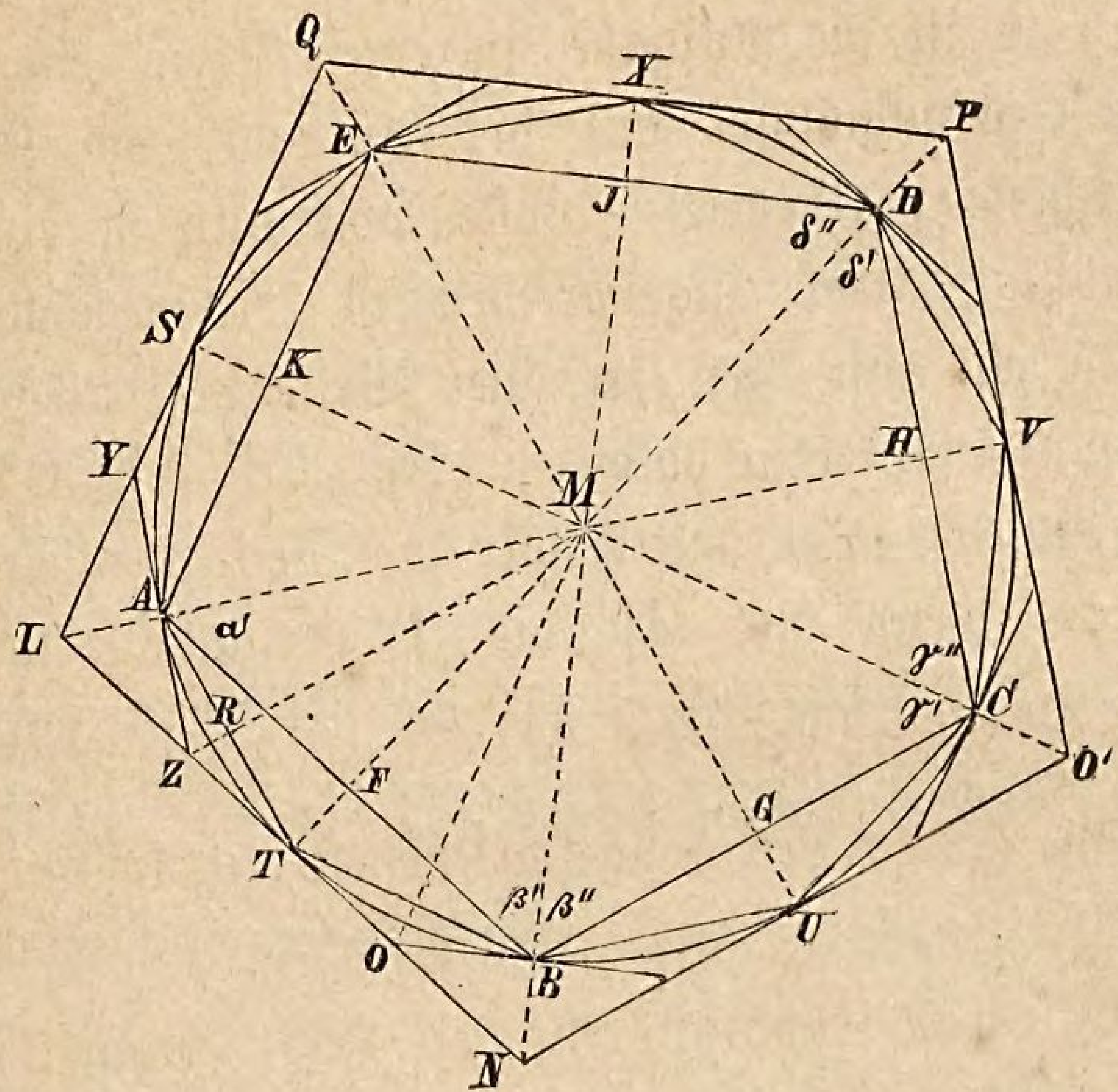
Nun hat aber jeder Winkel eines Kreissehnenvielecks zum Maße 180^0 vermindert um die Hälfte der Bogen seiner Schenkel. Mithin sind die Winkel desselben gleich, wenn die Seiten gleich sind. Die Seiten aber sind gleich, wenn die zugehörigen Bogen gleich sind.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Wenn die Kreislinie in n gleiche Theile getheilt ist, so bilden die zugehörigen Sehnen ein regelmäßiges nEck.

Um nun zu sehen, ob sich der Lehrsatz 1 auch umkehren läßt, d. h. ob sich um jedes regelmäßige Vieleck ein Kreis beschreiben läßt, beachten wir, daß der Mittelpunkt des Kreises, wovon die Seiten eines Vielecks Sehnen sein sollen, auf den Halbirungssenkrechten der Seiten liegen muß.

Fig. 120.



Ist also ABCDE (Fig. 120) ein regelmäßiges Fünfeck, AF = FB, BG = GC, MF ⊥ AB, MG ⊥ BC, so ist M der Mittelpunkt und MA der Radius des Kreises, der durch A, B und C geht. Es gibt nun nur dann einen dem regelmäßigen Fünfeck umgeschriebenen Kreis, wenn jener außer durch A, B und C auch durch D und E geht. Dieses ist aber der Fall, wenn AM = MB = MC = MD = ME. Nun ist aber △ AMF ≅ BMF ≅ BMG ≅ CMG. Folglich AM = BM = CM, $\alpha' = \beta' = \beta'' = \gamma' = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\gamma$, wenn die ganzen Vieleckswinkel α, β, γ u. s. w. heißen. Vergleichen wir nun die Dreiecke CMB und CMD, so ist CM = CM, CB = CD, $\gamma' = \frac{1}{2}\gamma$, also auch $\gamma'' = \frac{1}{2}\gamma$, also $\gamma' = \gamma''$, folglich △ CMB ≅ CMD. Daraus folgt MD = MB = MC. Mithin $\delta' = \gamma'' = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\delta$. Folglich $\delta'' = \frac{1}{2}\delta = \delta'$. Nun läßt sich auch zeigen, daß △ DMC ≅ DME; mithin DM = DE. Auf dieselbe Weise können wir fortfahren, wenn auch die Seitenzahl des regelmäßigen Vielecks eine beliebige Zahl ist. Es läßt sich also um jedes

regelmäßige nEck ein Kreis beschreiben. — Da also die Seiten eines regelmäßigen Vielecks gleiche Sehnen des umgeschriebenen Kreises sind, so sind alle von dem Mittelpunkte desselben gleich weit entfernt: MF = MG = MH = MJ = MK (Fig. 120). Beschreibt man nun mit MF um M einen Kreis, so berührt derselbe alle Seiten des regelmäßigen Vielecks.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. In und um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Durch Lehrsatz 1 ist die Aufgabe, in einen Kreis ein regelmäßiges nEck zu beschreiben, zurückgeführt auf die Aufgabe, die Kreislinie oder 4 R in n gleiche Theile zu theilen. Wollen wir also in einen Kreis, in welchem ein regelmäßiges nEck eingeschrieben ist, ein regelmäßiges 2nEck construiren, so haben wir nur den zu einer Seite des nEcks gehörenden Bogen oder Mittelpunktswinkel zu halbiren. Ist z. B. ABCDE (Fig. 120) ein regelmäßiges Fünfeck, so erhalten wir die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks, wenn wir MF bis T verlängern und T mit A oder B verbinden. Da nämlich Bogen AB = $\frac{360^0}{5}$, so ist Bogen AT = $\frac{360^0}{10}$, mithin AT die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks (Lehrs. 1).

Zieht man durch den Endpunkt T der zum Radius verlängerten Senkrechten MF eine Tangente an den Kreis, die die verlängerten Radien MA und MB in L und N trifft, so steht LN sowie AB auf MT senkrecht, es ist also LN ╪ AB. Es ist also auch △ LMN gleichschenklig wie △ AMB. Von diesem gleichschenkligen Dreieck LMN ist der Winkel an der Spitze, nämlich ∢ LMN $\frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des regelmäßigen Vielecks ABCDE ist. Verlängert man ebenso die Senkrechten MG, MH, MJ u. s. w. zu den Radien MU, MV, MX und zieht durch U, V, X u. s. w. Tangenten, so erhält man n gleichschenklige Dreiecke, die in dem Winkel an der Spitze und der Höhe zur Grundlinie übereinstimmen, mithin congruent sind. Die Durchschnittspunkte der Tangenten liegen mithin auf den verlängerten Radien MB, MA u. s. w. Das so entstandene Tangentenvieleck hat gleiche Seiten, und seine Winkel sind Parallelwinkel der Winkel des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks, also wie diese einander gleich. Das Tangentenvieleck LNO'PQ (Fig. 120) ist also ein umgeschriebenes regelmäßiges nEck. Zieht man durch die Ecken

A, B, C, D, E Tangenten an den Kreis, z. B. YZ, so erhalten wir ein regelmäßiges 2nEck um den Kreis.

§ 87.

Aus Figur 120 ergibt sich leicht, daß bei Verdoppelung der Seitenzahl der eingeschriebenen und der umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke die Umfänge bei den eingeschriebenen wachsend, bei den umgeschriebenen abnehmend sich der Kreislinie nähern, womit sie bei unendlich großer Seitenzahl zusammenfallen. Dasselbe gilt vom Flächeninhalte: Der Kreis ist also ein regelmäßiges Vieleck von unendlich großer Seitenzahl, d. h. er ist die Grenze der eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke, also diejenige Größe, der sich die eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke um so mehr nähern, je größer ihre Seitenzahl wird.

Da wir die Kreislinie als Umfang eines Vielecks mit unendlich vielen Seiten ansehen können, so ist sie als Umfang der umschließenden Figur größer als der Umfang eines eingeschriebenen Vielecks, und als Umfang der umschlossenen Figur kleiner als der Umfang eines umgeschriebenen Vielecks.

Um daher die Größenbestimmungen des Kreises zu erhalten, müssen wir die Aenderungen betrachten, welche eintreten, wenn die Seitenzahl der regelmäßigen Vielecke sich verdoppelt. Es ist AB (Fig. 120) die Seite des eingeschriebenen, LN die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen nEcks, AT die Seite des eingeschriebenen, ZO die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcks. Die Inhalte derselben Figuren seien i_n, J_n, i_{2n}, J_{2n}.

Alsdann ist
$$i_n = 2n \cdot \triangle\, AMF,$$
$$J_n = 2n \cdot \triangle\, LMT,$$
$$i_{2n} = 2n \cdot \triangle\, AMT,$$
$$J_{2n} = 4n \cdot \triangle\, ZMT.$$

Wir haben also: $i_n : i_{2n} : J_n = \triangle\, AMF : \triangle\, AMT : \triangle\, LMT.$

Es ist aber $\triangle\, AMF : AMT = MF : MT$
$= MA : ML.$ Aber auch
$MA : ML = \triangle\, AMT : \triangle\, LMT.$ Mithin:

$$\triangle\, AMF : \triangle\, AMT = \triangle\, AMT : \triangle\, LMT, \text{ oder}$$
$$i_n : i_{2n} = i_{2n} : J_n, \text{ oder}$$
$$i_{2n}^2 = i_n \cdot J_n, \text{ also}$$
$$i_{2n} = \sqrt{i_n \cdot J_n}.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Beschreibt man in einen Kreis ein regelmäßiges nEck und ein regelmäßiges 2nEck und um den Kreis ein regelmäßiges 2nEck, so ist das eingeschriebene 2nEck die mittlere Proportionale zwischen den beiden nEcken.

Um nun auch die Beziehungen zu J_{2n} zu finden, beachten wir, daß $\triangle ZMT = \triangle ZMA = \frac{J_{2n}}{4n}$. Es ist nun:

$$\begin{aligned}\triangle ZMT : \triangle LMZ &= ZT : ZL \\ &= TM : LM, \text{ (da } \sphericalangle ZMT = ZML), \\ &= FM : AM \\ &= FM : TM \\ &= i_n : i_{2n}. \text{ Folglich:}\end{aligned}$$

$$\triangle ZMT + \triangle LMZ : \triangle ZMT = i_n + i_{2n} : i_n, \text{ oder}$$

$$\triangle LMT : \triangle ZMT = i_n + i_{2n} : i_n. \text{ Es ist aber}$$

$$\triangle LMT = \frac{J_n}{2n}, \triangle ZMT = \frac{J_{2n}}{4n}. \text{ Mithin:}$$

$$\begin{aligned}\triangle LMT : \triangle ZMT &= \frac{J_n}{2n} : \frac{J_{2n}}{4n} \\ &= 2J_n : J_{2n}. \text{ Also:}\end{aligned}$$

$$2J_n : J_{2n} = i_n + i_{2n} : i_n. \text{ Folglich:}$$

$$J_{2n} = \frac{2i_n \cdot J_n}{i_n + i_{2n}}.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Beschreibt man in und um einen Kreis je ein regelmäßiges nEck und je ein regelmäßiges 2nEck, so ist das umgeschriebene regelmäßige 2nEck gleich dem doppelten Produkte der nEcke dividirt durch die Summe der eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke.

§ 88.

Nachdem wir im Vorhergehenden die ein- und umgeschriebenen Vielecke in Beziehung auf den Flächeninhalt verglichen haben, wollen wir nun die Umfänge miteinander vergleichen.

Der Umfang des eingeschriebenen regelm. nEcks heiße u_n, des eingeschr. regelmäßigen 2nEcks u_{2n}, des umgeschriebenen regelmäßigen nEcks U_n, des umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcks U_{2n} Alsdann ist (Fig. 120) $u_n = 2n \cdot AF$, $U_n = 2n \cdot LT$, $u_{2n} = 2n \cdot AT$, $U_{2n} = 4n \cdot ZT$.

Nun ist $\frac{U_{2n}}{2U_n} = \frac{ZT}{LT} = \frac{ZT}{ZT + ZL} = \frac{1}{1 + \frac{ZL}{ZT}}$.

Da aber $\sphericalangle$ ZML = ZMT, so ist $\frac{ZL}{ZT} = \frac{ML}{MT} = \frac{ML}{MA} = \frac{LT}{AF}$ $= \frac{U_n}{u_n}$. Setzen wir nun in den obigen Ausdruck für $\frac{ZL}{ZT}$ seinen Werth $\frac{U_n}{u_n}$ ein, so erhalten wir: $\frac{U_{2n}}{2U_n} = \frac{1}{1 + \frac{U_n}{u_n}}$, oder

$$\frac{U_{2n}}{2U_n} = \frac{u_n}{u_n + U_n}; \text{ mithin:}$$

$$U_{2n} = \frac{2u_n \cdot U_n}{u_n + U_n}; \text{ mithin: } \frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right),$$

welcher Ausdruck bei der Ausrechnung bequemer ist.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Der Umfang des dem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcks ist gleich dem doppelten Produkte des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen nEcks dividirt durch die Summe dieser beiden nEcke, oder der reciproke Werth des Umfangs des dem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcks ist das arithmetische Mittel der Umfänge der ein- und umgeschriebenen regelmäßigen nEcke.

Vergleichen wir nun auch die beiden eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke miteinander:

$\frac{u_n}{u_{2n}} = \frac{AF}{AT}$. AF und AT sind Seiten des Dreiecks AFT. Dieses ist ähnlich dem Dreieck TRZ. Folglich ist $\frac{AF}{AT} = \frac{TR}{TZ} = \frac{TA}{OZ} = \frac{u_{2n}}{U_{2n}}$.

Mithin $\frac{u_n}{u_{2n}} = \frac{u_{2n}}{U_{2n}}$, oder $u_{2n}^2 = u_n \cdot U_{2n}$.

Folglich $u_{2n} = \sqrt{u_n \cdot U_{2n}}$, oder, wenn wir für U_{2n} seinen Werth einsetzen,

$$u_{2n} = u_n \sqrt{\frac{2U_n}{u_n + U_n}};$$

für die Berechnung eignet sich die Formel:

$$\frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}}.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Der Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen 2nEcks ist die

mittlere Proportionale zwischen dem Umfange des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks und dem Umfange des umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcks.

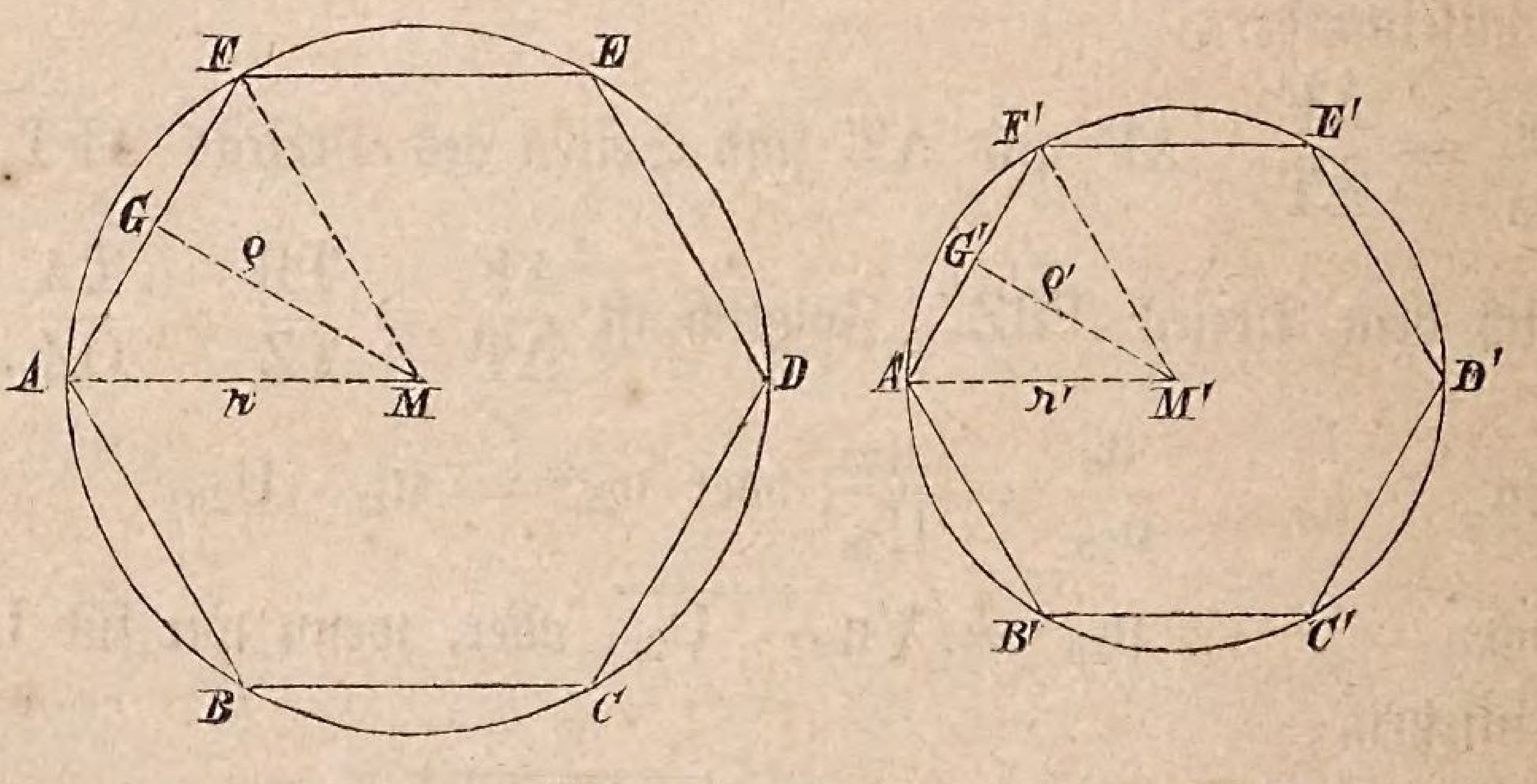
Wie sich aus Figur 120 ergibt, liegt der Umfang des Kreises zwischen dem eingeschriebenen und dem umgeschriebenen regelmäßigen nEcke, sowie zwischen dem eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcke, und ist bei diesen letzteren der Unterschied bedeutend kleiner als bei den beiden ersteren.

e. Die Umfänge der regelmäßigen Vielecke und der Kreise.

§ 89.

Jeder Winkel eines regelmäßigen nEcks ist gleich $\frac{2n - 4}{n}$ R; mithin stimmen regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl in den Winkeln überein, und da sich selbstverständlich bei diesen Vielecken die unter sich gleichen Seiten des einen wie die unter sich gleichen des anderen verhalten, so sind regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl ähnliche Figuren. Die Umfänge ähnlicher Vielecke aber verhalten sich wie gleichliegende Seiten. Also verhalten sich die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl wie ihre Seiten.

Fig. 121.



Wenn also (Fig. 121) ABCDEF und A′B′C′D′E′F′ regelmäßige nEcke sind, deren Umfänge U_n und U'_n und deren Inhalte J_n und J'_n heißen, so ist:

$$U_n : U'_n = AF : A'F'.$$

Sind nun M und M′ die Mittelpunkte der umgeschriebenen Kreise, so sind die Dreiecke AMF und A′M′F′ gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Winkeln an den Spitzen M und M′. Mithin $\triangle$ AMF $\sim$ A′M′F′; folglich AF : A′F′ = AM : A′M′ = GM : G′M′, oder AF : A′F′

$= r : r' = \varrho : \varrho'$, wenn r und ϱ die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise sind. Also auch:

$$U_n : U'_n = r : r' \\ = \varrho : \varrho'.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise.

In Figur 121 ist $\triangle AMF = \frac{1}{2}AF \cdot \varrho = \frac{1}{2}s \cdot \varrho$, wenn s die Seite des regelmäßigen nEcks; mithin $J_n = n \cdot \triangle AMF = \frac{1}{2}ns\varrho = \frac{1}{2}U_n \cdot \varrho$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange desselben und dem Radius des eingeschriebenen Kreises. Aus 2 ergibt sich:

$$\frac{J_n}{J'_n} = \frac{\frac{1}{2}U_n \cdot \varrho}{\frac{1}{2}U'_n \cdot \varrho'} \\ = \frac{U_n}{U'_n} \cdot \frac{\varrho}{\varrho'} \\ = \frac{\varrho^2}{\varrho'^2} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Dasselbe ergibt sich aber auch leicht auf folgende Weise:

Die Inhalte ähnlicher Vielecke oder kurz ähnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Da nun regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl ähnlich sind, so ist (Fig. 121):

$$J_n : J'_n = AF^2 : AF'^2 \\ = r^2 : r'^2 = \varrho^2 : \varrho'^2.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Die Inhalte regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Radien der eingeschriebenen oder der umgeschriebenen Kreise.

§ 90.

Denken wir uns in die Kreise (Fig. 121) zu den beiden nEcken die 2nEcke, 4nEcke, 8nEcke u. s. w. bis $\overset{\infty}{2} \cdot$ nEcke construirt, deren Umfänge

und Inhalte entsprechend heißen U_n, U'_n, U_{2n}, U'_{2n}, U_{4n}, U'_{4n} u. s. w., J_n, J'_n, J_{2n}, J'_{2n}, J_{4n}, J'_{4n} u. s. w., so ist:

$$U_n : U'_n = r : r'; \qquad J_n : J'_n = r^2 : r'^2;$$
$$U_{2n} : U'_{2n} = r : r'; \qquad J_{2n} : J'_{2n} = r^2 : r'^2;$$
$$U_{4n} : U'_{4n} = r : r'; \qquad J_{4n} : J'_{4n} = r^2 : r'^2;$$
$$U_{8n} : U'_{8n} = r : r'; \qquad J_{8n} : J'_{8n} = r^2 : r'^2;$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$U_{\infty\,2.n} : U'_{\infty\,2.n} = r : r', \text{ oder} \qquad J_{\infty\,2.n} : J'_{\infty\,2.n} = r^2 : r'^2, \text{ oder}$$
$$U_k : U'_k = r : r' = 2r : 2r', \qquad J_k : J'_k = r^2 : r'^2 = (2r)^2 : (2r')^2,$$

wenn U_k und U'_k die Umfänge der Kreise sind. wenn J_k und J'_k die Inhalte der Kreise bedeuten.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser.

2. Die Inhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

Nach 1 ist:

$$U : 2r = U' : 2r'.$$

Es ist also das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser bei allen Kreisen dasselbe, also eine constante Zahl. Diese constante Zahl wird π genannt. Es ist also

$$U_k : 2r = \pi; \text{ mithin:}$$
$$U_k = 2r\pi.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser und der Zahl π.

Da der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks gleich $\frac{1}{2}U \cdot \varrho$, so ist auch der Inhalt des regelmäßigen Vielecks von unendlich vielen Seiten, d. h. des Kreises, gleich $\frac{1}{2}U \cdot \varrho$. Beim Kreise ist aber $\varrho = r$. Mithin ist $J_k = \frac{1}{2}U \cdot r$. Da aber beim Kreise $U = 2r\pi$, so ist

$$J_k = r^2 \cdot \pi.$$

Wir erhalten also den Lehrsatz:

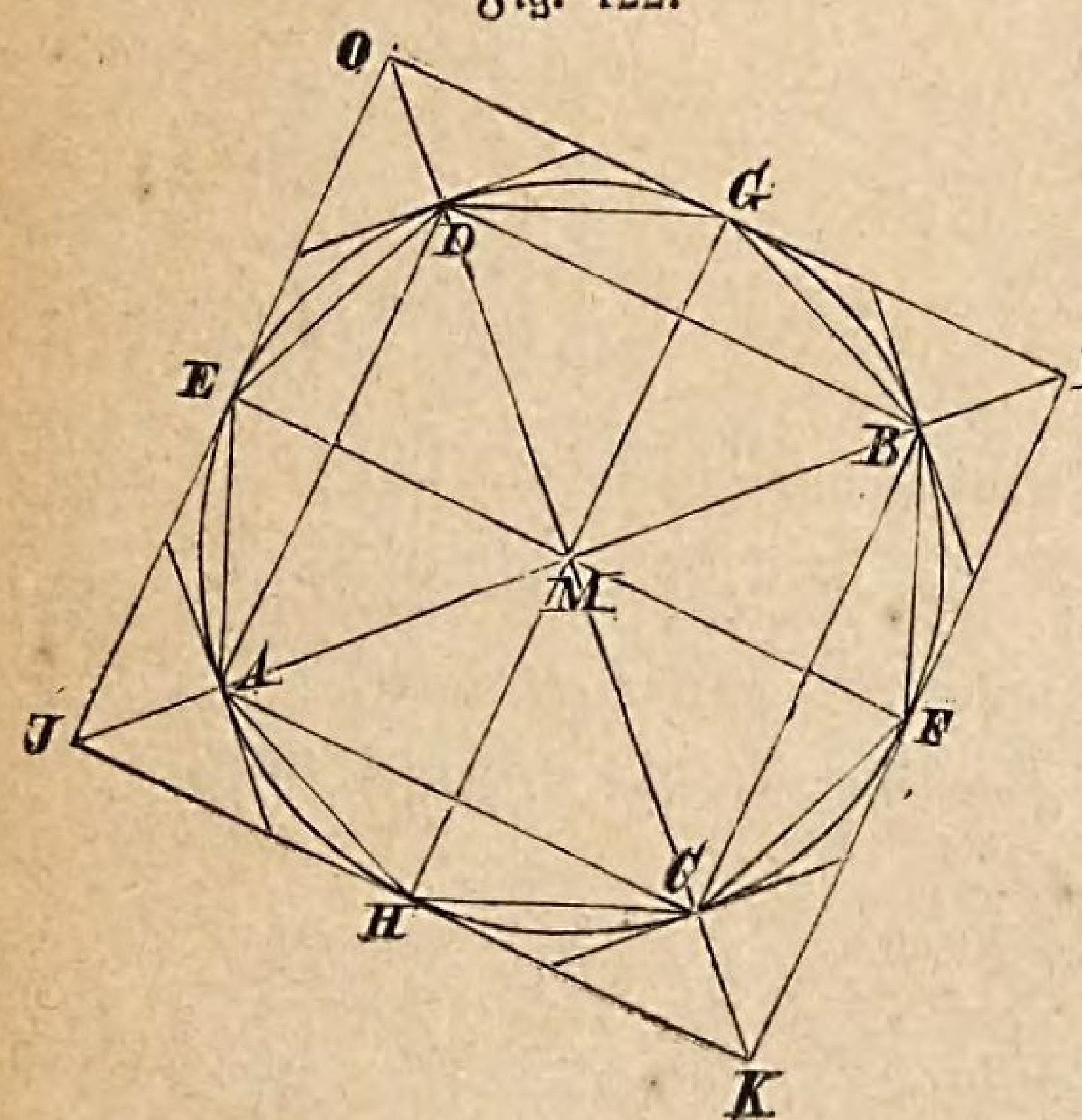
4. Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Radius multiplizirt mit der Zahl π.

§ 91.

Da $J_k = r^2\pi$, so ist, wenn $r = 1$ ist, $J_k = \pi$. Es ist also π gleich der Inhaltszahl des Kreises, dessen Radius 1 ist. Wir werden also π erhalten, wenn wir den Inhalt jenes Kreises bestimmen.

Es sei der Radius des Kreises um M (Fig. 122) gleich 1. Ziehen wir nun die beiden Durchmesser AB und CD senkrecht auf einander und verbinden ihre Endpunkte, so ist ACBD ein eingeschriebenes regelmäßiges Viereck oder ein Quadrat. Nun ist $AD^2 = AM^2 + DM^2 = 2r^2$, also hier $i_4 = 2$. Ziehen wir nun die auf den Seiten des eingeschriebenen Quadrats senkrechten Durchmesser EF und HG und durch ihre Endpunkte E, H, F und G Tangenten an den Kreis, so ist JKLO das umgeschriebene Quadrat. Da aber $JO = HG = 2r$, so ist $JO^2 = 4r^2$, oder, da $r = 1$, $J_4 = 4$. Verbinden wir nun die Ecken des eingeschriebenen Quadrats mit den Berührungspunkten des umgeschriebenen, so erhalten wir das eingeschriebene regelmäßige Achteck, und wenn man durch dieselben Ecken Tangenten an den Kreis zieht, so entsteht das umgeschriebene regelmäßige Achteck. Nach § 87, 1 ist aber $i_{2n} = \sqrt{i_n \cdot J_n}$, und nach § 87, 2 ist $J_{2n} = \frac{2 \cdot i_n \cdot J_n}{i_n + i_{2n}}$. Wir erhalten also:

Fig. 122.



$$i_8 = \sqrt{i_4 \cdot J_4} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{8} = 2{,}8284271,$$

$$J_8 = \frac{2 \cdot i_4 \cdot J_4}{i_4 + i_8} = \frac{16}{4{,}8284271} = 3{,}3137085.$$

Das weitere Ergebniß der Rechnung ist Folgendes:

Zahl der Seiten, also n.	Eingeschriebenes regelmäßiges Vieleck.	Umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184

Zahl der Seiten, also n.	Eingeschriebenes regelmäßiges Vieleck.	Umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck.
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926.

Da nun das eingeschriebene regelmäßige 32768Eck sich von dem umgeschriebenen regelmäßigen 32768Eck in der siebenten Decimalstelle nicht mehr unterscheidet, der Inhalt des Kreises aber zwischen beiden liegt, so ist die Inhaltszahl des Kreises mit dem Radius 1 und mithin auch

$$\pi = 3{,}1415926.$$

Wendet man die Formeln (§ 88) $\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right)$ und $\frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}}$ an und beachtet, daß $u_4 = 4\sqrt{2}$ und $U_4 = 8$ ist (Fig. 122), so ergibt die Rechnung Folgendes:

n	$\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{U_u}$
4	0,1767766953	0,125
8	0,1633203706	0,1508883477
16	0,1601822155	0,1571043592
32	0,1594108944	0,1586432873
64	0,1592188770	0,1590270908
128	0,1591709232	0,1591229839
256	0,1591589379	0,1591469536
512	0,1591559418	0,1591529457
1024	0,1591551928	0,1591544438
2048	0,1591550055	0,1591548183
4096	0,1591549587	0,1591549119
8192	0,1591549470	0,1591549353
16384	0,1591549441	0,1591549412

Mithin ist $\frac{1}{2} \cdot u_{16384} = 3{,}141592634$ und

$\frac{1}{2} \cdot U_{16384} = 3{,}141592692$. Folglich ist

$\pi = 3{,}1415926$.

Durch Fortsetzung der obigen Rechnung kann man die Zahl π, welche eine Irrationalzahl ist, bis zu jedem Grade der Genauigkeit berechnen.

Archimedes fand für π den Werth $3\frac{1}{7}$, Metius im sechszehnten Jahrhunderte $\frac{355}{113}$. In demselben Jahrhunderte berechnete Ludolph van Ceulen π bis auf 32 Decimalstellen. Von ihm hat π den Namen Ludolphische Zahl. In der neuesten Zeit wurde dieselbe auf mehr als 300 Decimalstellen mit Hülfe der höheren Analysis berechnet.

Aufgaben.

§ 92.

663. Gegeben ist der Punkt M und die Strecke a. Den geometrischen Ort des Punktes zu suchen, der von M die Entfernung a hat.

664. Gegeben sind die beiden Punkte A und B und die Strecke a. Die Punkte zu suchen, welche von A und B die Entfernung a haben. (Wann ist die Aufgabe möglich, wie viele Lösungen?)

665. 1) Durch die drei Ecken eines Dreiecks einen Kreis zu beschreiben, oder einem Dreiecke einen Kreis zu umschreiben; 2) durch drei gegebene Punkte eine Kreislinie zu ziehen.

666. Durch die vier Ecken eines Rechtecks einen Kreis zu beschreiben, oder einem Rechtecke einen Kreis zu umschreiben.

667. Gegeben sind der Punkt P und die Strecken e und E. Einen Kreis zu construiren, von dessen Umfang der Punkt P als größte Entfernung E, als kleinste Entfernung e hat, 1) wenn P in dem Kreise, 2) wenn P außerhalb des Kreises liegt.

668. Den Mittelpunkt des Kreises zu suchen, wovon 1) der Umfang, 2) ein Bogen gegeben ist.

669. Einen Kreis zu beschreiben, welcher 1) die drei Seiten eines Dreiecks, 2) die vier Seiten eines Quadrats, 3) die vier Seiten eines Rhombus zu Tangenten hat.

670. In einem gegebenen Punkte einer Kreislinie an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

671. Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Kreises an denselben eine Tangente zu ziehen.

672. Von einem Kreise sind gegeben 1) eine Sehne und ihr Abstand vom Mittelpunkte, 2) eine Sehne und die Tangente in dem einen Endpunkte derselben, 3) eine Sehne und außerdem ein Punkt, 4) eine Tangente und ihr Berührungspunkt und außerdem ein Punkt, 5) eine Sehne und der Winkel, den dieselbe mit der Tangente in dem einen Endpunkte bildet, 6) zwei Tangenten und auf einer der Berührungspunkt, 7) eine Sehne und der zugehörige Centriwinkel.

673. Ueber einer gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel faßt, oder von einem Kreise sind gegeben eine Sehne und der Peripheriewinkel über demselben.

674. Von einem Kreise sind gegeben eine Sehne und 1) die Differenz des zugehörigen Centriwinkels und des zugehörigen Peripheriewinkels auf derselben Seite mit dem Mittelpunkte, 2) die Summe des zugehörigen Centriwinkels und des Peripheriewinkels im kleineren Kreisabschnitte.

(675 bis 690) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher

675. eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt,

676. einen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt,

677. einen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht,

678. die Schenkel eines Winkels berührt,

679. zwei Geraden berührt, die nicht bis zum Durchschnittspunkte verlängert werden können,

680. einen Kreis und eine Gerade berührt,

681. zwei Kreise berührt.

682. durch zwei gegebene Punkte geht.

683. eine Gerade in einem gegebenen Punkte unter gegebener Sehne schneidet,

684. einen Kreis in einem gegebenen Punkte unter gegebener Sehne schneidet,

685. eine Gerade in einem gegebenen Punkte unter gegebenem Winkel schneidet,

686. einen Kreis in einem gegebenen Punkte unter gegebenem Winkel schneidet,

687. eine Gerade berührt und eine zweite 1) unter gegebener Sehne, 2) unter gegebenem Winkel schneidet,

688. eine Gerade berührt und einen Kreis 1) unter gegebener Sehne, 2) unter gegebenem Winkel schneidet.

689. einen Kreis berührt und eine Gerade 1) unter gegebener Sehne, 2) unter gegebenem Winkel schneidet.

690. einen Kreis berührt und einen zweiten 1) unter gegebener Sehne, 2) unter gegebenem Winkel schneidet,

691. In einem Kreise eine Sehne von gegebener Größe zu ziehen.

692. In einem Kreise eine Sehne zu ziehen, die von dem Mittelpunkte eine gegebene Entfernung hat.

693. Welches ist der geometrische Ort des Halbirungspunktes der Sehne, die von dem Mittelpunkte eines Kreises eine gegebene Entfernung hat.

694. Welches ist der geometrische Ort des Fußpunktes der Senkrechten, die man von dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne von gegebener Größe fällen kann.

695. Durch einen Punkt im Innern eines Kreises eine Sehne zu ziehen, die 1) vom Mittelpunkte eine gegebene Entfernung hat, 2) einer gegebenen Strecke gleich ist.

696. Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante zu ziehen, die den Kreis 1) unter gegebener Sehne, 2) unter gegebenem Winkel schneidet.

697. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, die 1) einer Geraden parallel ist, 2) mit einer Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

698. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, dessen gerade Verbindungslinien mit den Endpunkten der Strecke AB einen gegebenen Winkel einschließen? (siehe Nr. 673.)

Von einem Dreiecke sind gegeben:

699. a, h_a, α.	702. a, h_a, $\beta = \gamma$.	705. a, α, b : c.
700. a, h_b, α.	703. a, h_a, h_b.	706. a, m_b, α.
701. a, m_a, α.	704. a, h_b, h_c.	

In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, wovon gegeben die Ecke A und

707. b, c.	717. b und der Durchschnittspunkt von b und μ_β.	725. b, c : h_b.
708. b, α.		726. β, ϱ. (Radius des eingeschr. Kreises.)
709. b, $\beta + \gamma$.		
710. b, γ.	718. h_a, μ_α (s. § 80, 2).	727. b, ϱ.
711. b, $\alpha + \beta$.	719. m_a, α.	728. a + c, β.
712. b, ${}^cP_b$.	720. m_b, α (s. Nr. 706).	729. a − c, β.
713. b, h_b.	721. h_a, α.	730. a + b + c, β.
714. b, m_b.	722. h_b, α.	731. α, b = c.
715. b, h_a.	723. α, b : c.	732. a = b = c.
716. b, h_c.	724. b, a : c.	733. a : b : c.
734. a : c, a = b.	735. a : h_c, a = b.	736. a : h_a, a = b.

Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, wovon gegeben sind der Berührungspunkt B′ und

737. b, α. 738. α, β. 739. h_b, α. 740. b, h_c. 741. a, α.

742. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei Geraden berührt.

743. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei Geraden berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

744. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei Geraden und einen Kreis berührt.

745. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine Gerade berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

746. An zwei Kreise mit gleichen Radien eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

747. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

748. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche einen zweiten Kreis 1) unter gegebener Sehne, 2) unter gegebenem Winkel schneidet.

749. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche zwei Geraden unter gleichen Winkeln schneidet.

(750 bis 757) Einen Kreis zu beschreiben, welcher

750. einen Kreis und eine Gerade berührt und zwar den Kreis in einem gegebenen Punkte,

751. einen Kreis und eine Gerade berührt und zwar die Gerade in einem gegebenen Punkte,

752. zwei Kreise berührt und zwar den einen in einem gegebenen Punkte,

753. einen Kreis berührt und durch zwei gegebene Punkte geht,

754. zwei Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht,

755. drei Kreise berührt,

756. einen Kreis und eine Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht,

757. zwei Kreise und eine Gerade berührt.

In einen Kreis ein Viereck zu construiren, wovon 1) eine Ecke in den auf der Kreislinie liegenden Punkt A fällt, 2) eine Seite entweder selbst oder verlängert durch einen innerhalb oder außerhalb des Kreises gegebenen Punkt P geht, und außerdem gegeben sind:

758. a, b, c.
759. a, b, d.
760. a, b, α.
761. a, b, γ.
762. a, b, d'.
763. a, c, δ.
764. b, α, δ.
765. $^{A}S_{b}$ (Senkrechte von der Ecke A auf die Seite b), α, β.
766. $^{A}S_{d'}$, α, β.
767. α, β, $\sphericalangle$ d''d'.
768. d'', d', a : b.
769. d'', a : b, c : d.
770. α, β, a : b.
771. β, a : b, c : d.

In einen Kreis ein Rechteck zu construiren, dessen eine Seite 1) durch einen im Innern des Kreises oder auf der Kreislinie gegebenen Punkt geht, 2) verlängert durch einen außerhalb des Kreises gegebenen Punkt geht, und wovon außerdem gegeben:

772. a. 773. $\sphericalangle$ d''d'. 774. $\sphericalangle$ ad''. 775. a + b. 776. a — b.

777. In einen Kreis ein Quadrat zu construiren, dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

778. In einen Kreis ein Quadrat zu construiren, dessen eine Seite von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat.

779. Um ein regelmäßiges nEck einen Kreis zu beschreiben.

780. In ein regelmäßiges nEck einen Kreis zu beschreiben.

781. Eine Strecke a so zu theilen, daß sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren (goldener Schnitt).

(Es ist also a : x = x : (a — x). Aus dieser Gleichung ergibt sich, $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Man construire diesen Ausdruck, führe aber dann den Beweis geometrisch.)

782. Wie groß ist der Centriwinkel, welcher zu der Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen oder umgeschriebenen nEcks gehört?

783. Welche aliquote Theile von 4 R oder 360^0 lassen sich leicht construiren?

784. Wie groß ist 1) der Centriwinkel, welcher zu der Seite eines regelmäßigen 6Ecks gehört, 2) die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 6Ecks? In und um einen Kreis ein regelmäßiges 6Eck zu construiren.

785. In und um einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck zu construiren.

786. Wie groß ist die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecks, wenn der Radius r ist?

787. Wie groß ist die Seite 1) des umgeschriebenen regelmäßigen 6Ecks, 2) des umgeschriebenen regelmäßigen 3Ecks?

788. Wie groß ist die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen nEcks, wenn die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks s und der Radius r ist?

789. In und um einen Kreis ein regelmäßiges Viereck oder Quadrat zu construiren und die Größe in r auszudrücken.

790. In und um einen Kreis ein regelmäßiges 8Eck, 16Eck, 2^nEck, 12Eck, 24Eck, $3 \cdot 2^n$Eck zu construiren.

791. In einen Kreis ein regelmäßiges 10Eck zu construiren. (Die Winkel in dem gleichschenkligen Dreiecke, welches die Seite des regelmäßigen Zehnecks mit zwei Radien bildet, sind 36^0 und 72^0. Man halbire den einen Winkel von 72^0 und vergleiche das neue gleichschenklige Dreieck mit dem ursprünglichen, so wird sich ergeben, wie der Radius durch jene Mediale getheilt ist und damit die Seite des regelmäßigen Zehnecks.)

792. In einen Kreis ein regelmäßiges 5Eck zu construiren.

793. Wie groß ist die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks, Fünfecks?

794. Der wievielte Theil der Peripherie ist die Differenz der Bogen, die zu der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks und des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks gehören?

795. In einen Kreis ein regelmäßiges 15Eck, 30Eck u. s. w. zu beschreiben.

796. Wie groß ist die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Achtecks, Zwölfecks, 2nEcks, wenn die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks s und r der Radius ist?

797. Wie groß ist der Umfang 1) des umgeschriebenen regelmäßigen nEcks, 2) des eingeschriebenen regelmäßigen 2nEcks, 3) des umgeschriebenen regelmäßigen 2nEcks, wenn die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks s ist?

798. Die Zahl π annähernd dadurch zu bestimmen, daß man den Umfang des eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen 6Ecks, des ein= und umgeschriebenen regelmäßigen 12Ecks, 24Ecks, 48Ecks u. s. w. berechnet.

799. Eine Kreislinie zu construiren, welche gleich ist 1) der Summe von a) 2, b) n gegebenen Kreislinien, 2) der algebraischen Summe von n gegebenen Kreislinien.

800. Einen Kreis zu construiren, welcher gleich ist 1) der Summe von a) 2, b) n gegebenen Kreisflächen, 2) der algebraischen Summe von n gegebenen Kreisflächen.

801. Durch die drei Ecken sowie über den Katheten eines recht= winkligen Dreiecks sind Halbkreise zu beschreiben. Wie groß ist die Summe der beiden Möndchen (Möndchen des Hippokrates)?

802. Eine Strecke ist in zwei beliebige Theile getheilt und über der ganzen Strecke und ihren Theilen sind Halbkreise zu beschreiben. Wie groß ist die von den drei Halbkreisen gebildete Sichel (Sichel des Archi= medes)?

Achtes Kapitel.

Einige Sätze aus der neueren Geometrie.

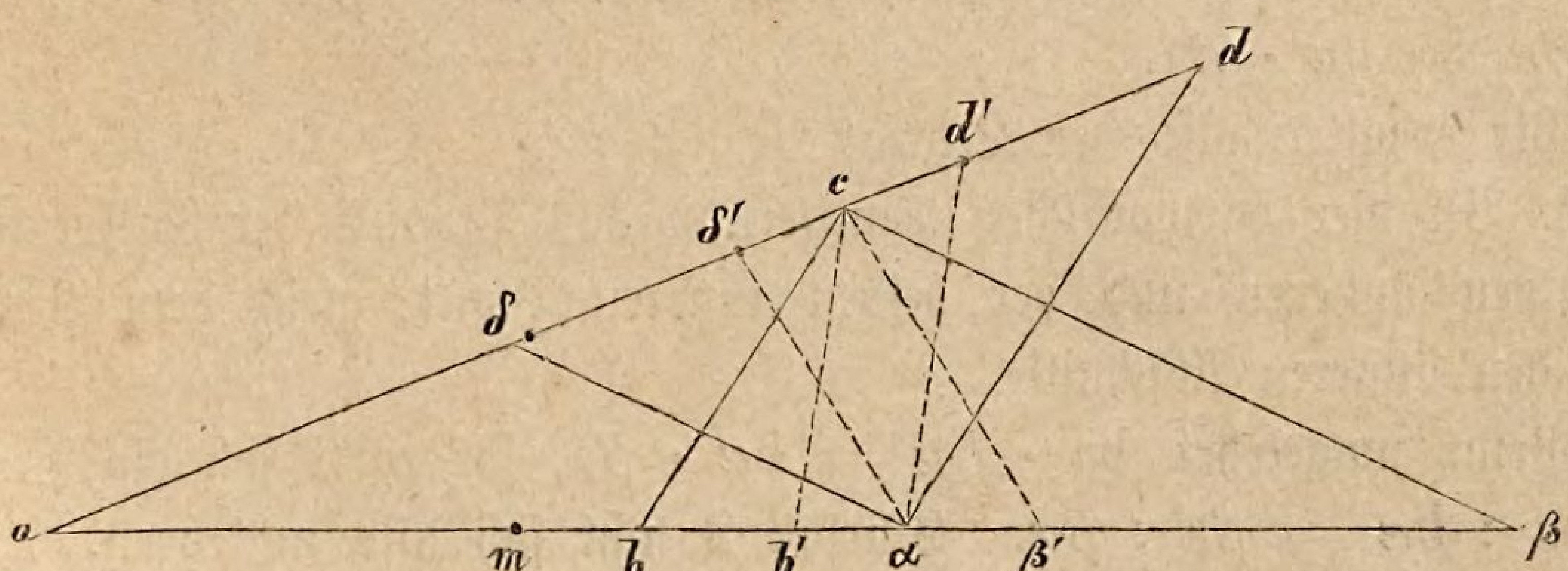
1. Harmonische Punkte und harmonische Strahlen.

A. Harmonische Punkte.

§ 93.

Soll die Strecke aα (Fig. 123) in dem Verhältnisse p zu q getheilt werden, so machen wir ac = p und cd = q, verbinden d mit α und ziehen durch c eine Parallele zu dα. Alsdann ist ba : bα = ac : cd = p : q.

Fig. 123.



Machen wir nun cδ = cd = q, wobei zunächst q < p, verbinden δ mit α und ziehen c$\beta \parallel \delta\alpha$, so ist auch βa : $\beta\alpha$ = ac : δc = p : q; mithin ba : bα = βa : $\beta\alpha$. Man sagt alsdann, die Strecke aα sei in b und β harmonisch getheilt. Da aber auch ab : aβ = αb : $\alpha\beta$, so ist auch Strecke bβ in a und α harmonisch getheilt. a und α, b und β heißen zugeordnete oder conjugirte harmonische Punkte.

Es sei nun das Verhältniß p zu q veränderlich. Wird q kleiner, etwa gleich cd′ = cδ′, so rücken die Punkte b und β, in welchen aα harmonisch getheilt wird, näher zu α und fallen mit α zusammen, wenn q = o wird. Wird q größer, so rücken b und β von α weg. Es sei am = mα = r. b bleibt zwischen m und α, und β rechts von α in

endlicher Entfernung, so lange $q < p$. Wird $q = p$, so fällt b in m, da alsdann c die Mitte von ad, und β rückt in's Unendliche, da $c\beta \mp \delta\alpha$, δ aber in diesem Falle mit a zusammenfällt.

Wir erhalten also den Satz:

1. Eine Strecke wird von ihrem Halbirungspunkte und einem auf der Verlängerung der Strecke in unendlicher Entfernung gelegenen Punkte harmonisch getheilt.

Wird q größer als p, so fällt b zwischen m und a, δ in die Verlängerung von ca über a hinaus, β also links von a.

Dieselben Ergebnisse erhalten wir durch Betrachtung der Proportion $ba : b\alpha = \beta a : \beta\alpha$. Ist nämlich $ba > b\alpha$, liegt also b zwischen m und α, so muß $\beta a > \beta\alpha$ sein, also muß β rechts von α liegen. Ist $ba < b\alpha$, liegt also b zwischen m und a, so muß $\beta a < \beta\alpha$ sein, also muß β links von a liegen. Ist $ba = b\alpha$, liegt also b in m, so ist $ba : b\alpha = 1$, also muß auch $\beta a : \beta\alpha = 1$ sein. Dieses ist aber nur der Fall bei $\infty a : \infty\alpha$, da β nicht zwischen a und α liegen kann. Liegt b in α, so ist $ba : b\alpha = a\alpha : 0 = \infty$. Es muß also auch $\beta a : \beta\alpha = \infty$ sein, dieses ist nur der Fall, wenn β in α fällt.

Aus der harmonischen Proportion $ba : b\alpha = \beta a : \beta\alpha$ ergibt sich $ba \cdot \beta\alpha = b\alpha \cdot \beta a$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Bei vier harmonischen Punkten ist das Produkt der Entfernungen der beiden äußeren und der beiden inneren Punkte gleich dem Produkte der beiden äußeren Abschnitte.

Wenn umgekehrt $ba \cdot \beta\alpha = b\alpha \cdot \beta a$, so ergibt sich die Proportion $ba : b\alpha = \beta a : \beta\alpha$. Lehrsatz 2 läßt sich also umkehren.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Wenn vier Punkte auf einer Geraden so liegen, daß das Produkt der Entfernungen der beiden äußeren und der beiden inneren Punkte gleich dem Produkte der beiden äußeren Abschnitte ist, so sind es vier harmonische Punkte.

§ 94.

Es sei (Fig. 123) $ma = m\alpha = r$. Setzt man nun in die harmonische Proportion $ba : b\alpha = \beta a : \beta\alpha$ für die einzelnen Glieder ihre Werthe in r, so erhält man:

$$(r + mb) : (r - mb) = (m\beta + r) : (m\beta - r).$$

Durch Addition und Subtraktion erhalten wir dann:

$$2r : 2mb = 2m\beta : 2r, \text{ oder } r : mb = m\beta : r.$$

Mithin ist $r^2 = mb \cdot m\beta$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Die Hälfte einer Strecke ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen der Mitte der Strecke von zwei Punkten, in welchen die Strecke harmonisch getheilt wird.

Ist umgekehrt $r^2 = am^2 = \left(\frac{a\alpha}{2}\right)^2 = mb \cdot m\beta$, so ist

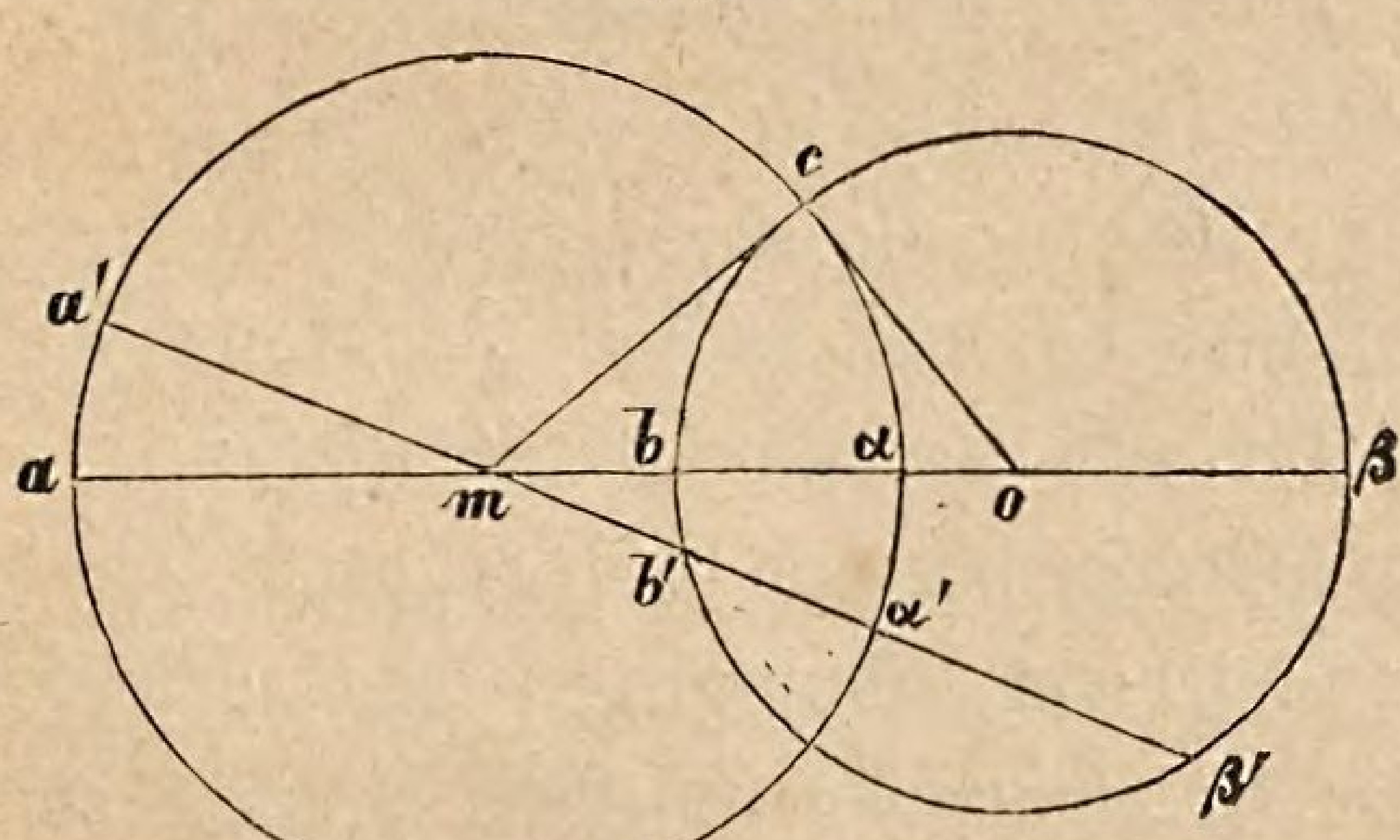
$$r : mb = m\beta : r. \text{ Mithin:}$$

$$(r + mb) : (r - mb) = (m\beta + r) : (m\beta - r), \text{ oder}$$

$$ba : b\alpha = \beta a : \beta\alpha.$$

Wenn also (Fig. 124) $r^2 = \left(\frac{a\alpha}{2}\right)^2 = mb \cdot m\beta$, so sind a, α, b, β vier harmonische Punkte, und wenn man über $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmesser Kreise beschreibt, so werden sich dieselben rechtwinklig schneiden, d. h. ihre nach einem Schneidepunkte gezogenen Radien stehen senkrecht aufeinander.

Fig. 142.



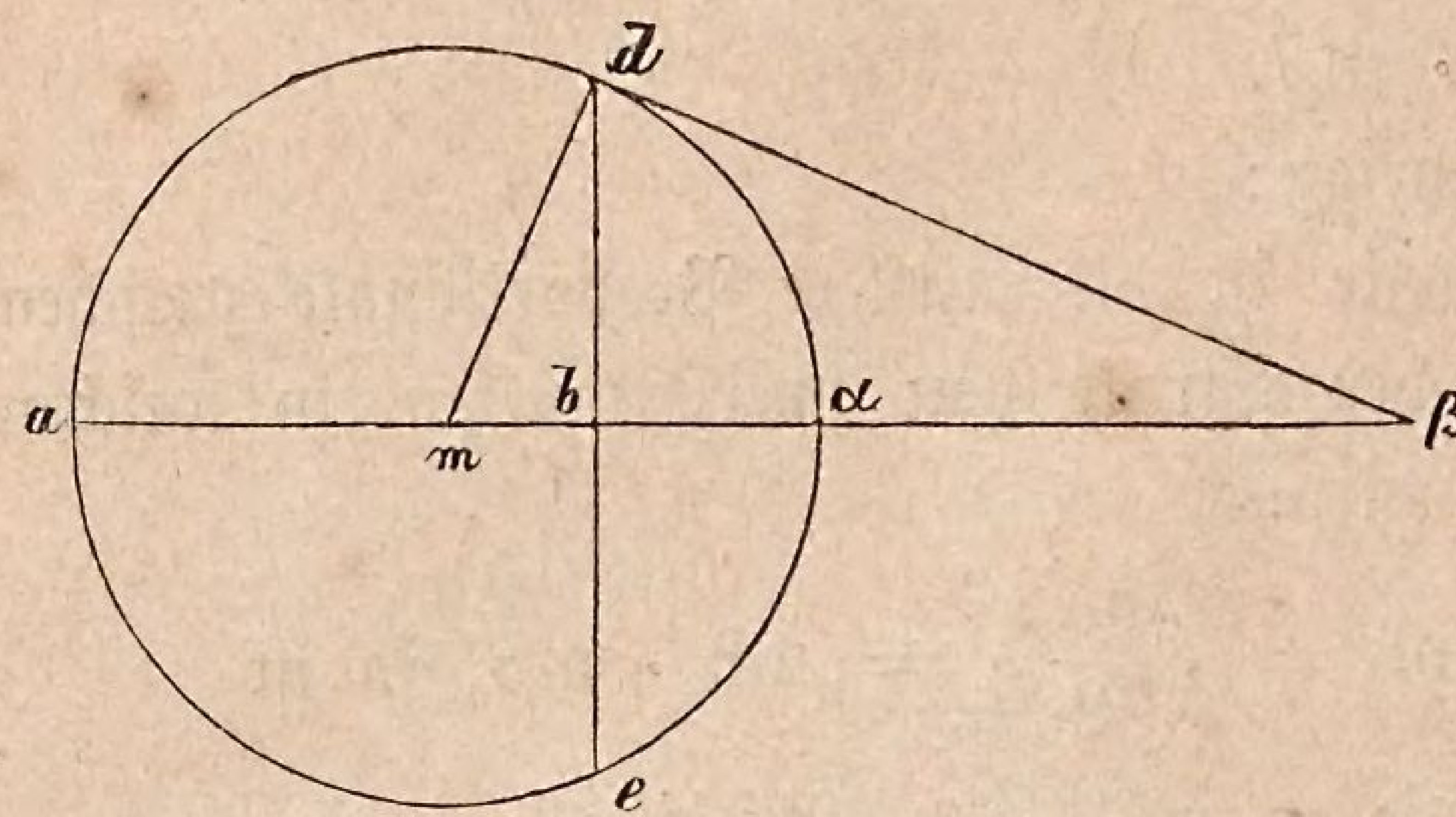
Ist $a\alpha$ Durchmesser des Kreises um m, mc ein beliebiger Radius desselben Kreises, und oc $\perp$ mc, so schneidet der Kreis um o mit dem Radius oc den Durchmesser $a\alpha$ harmonisch, da $Oc^2 = O\alpha \cdot Oa$. Zieht man einen anderen Durchmesser $a'\alpha'$, welcher den Kreis um o in b' und β' schneidet, so ergibt sich leicht, daß $ma'^2 = mb' \cdot m\beta'$. Folglich sind auch a', α', b', β' vier harmonische Punkte.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so wird jeder Durchmesser des einen Kreises von dem andern Kreise harmonisch getheilt.

Da im rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete die mittlere Proportionale ist zwischen der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse, so erhält man vier harmonische Punkte, wenn man mit einer Kathete um ihren Durchschnittspunkt mit der Hypotenuse einen Kreis beschreibt. (Fig. 125.)

Fig. 125.



Wenn also (Fig. 125) ed $\perp$ aα und dβ $\perp$ md, so sind a, α, b, β vier harmonische Punkte.

Um die Beziehungen eines Punktes a zu drei anderen α, b, β, welche mit ihm eine harmonische Proportion bilden, zu finden, setzt man in der harmonischen Proportion ba : bα = βa : βα für die Glieder, in welchen a noch nicht vorkommt, Werthe, welche a enthalten: also für bα den Werth (aα — ab), und für βα die gleiche Größe (aβ — aα). Alsdann erhalten wir:

$$ab : (a\alpha - ab) = a\beta : (a\beta - a\alpha).$$ Daraus ergibt sich:

$$2ab \cdot a\beta = a\alpha\ (a\beta + ab).$$ Mithin:

$$\frac{2}{a\alpha} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a\beta}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Beziehungen des Punktes α:

$$\frac{2}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} - \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Das negative Zeichen zeigt hier an, daß b und β auf verschiedenen Seiten von α liegen müssen. Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Bei einer harmonischen Proportion ist der reciproke Werth der Entfernung eines Punktes von seinem conjugirten das arithmetische Mittel der reciproken Werthe der Entfernungen desselben Punktes von den beiden anderen Punkten.

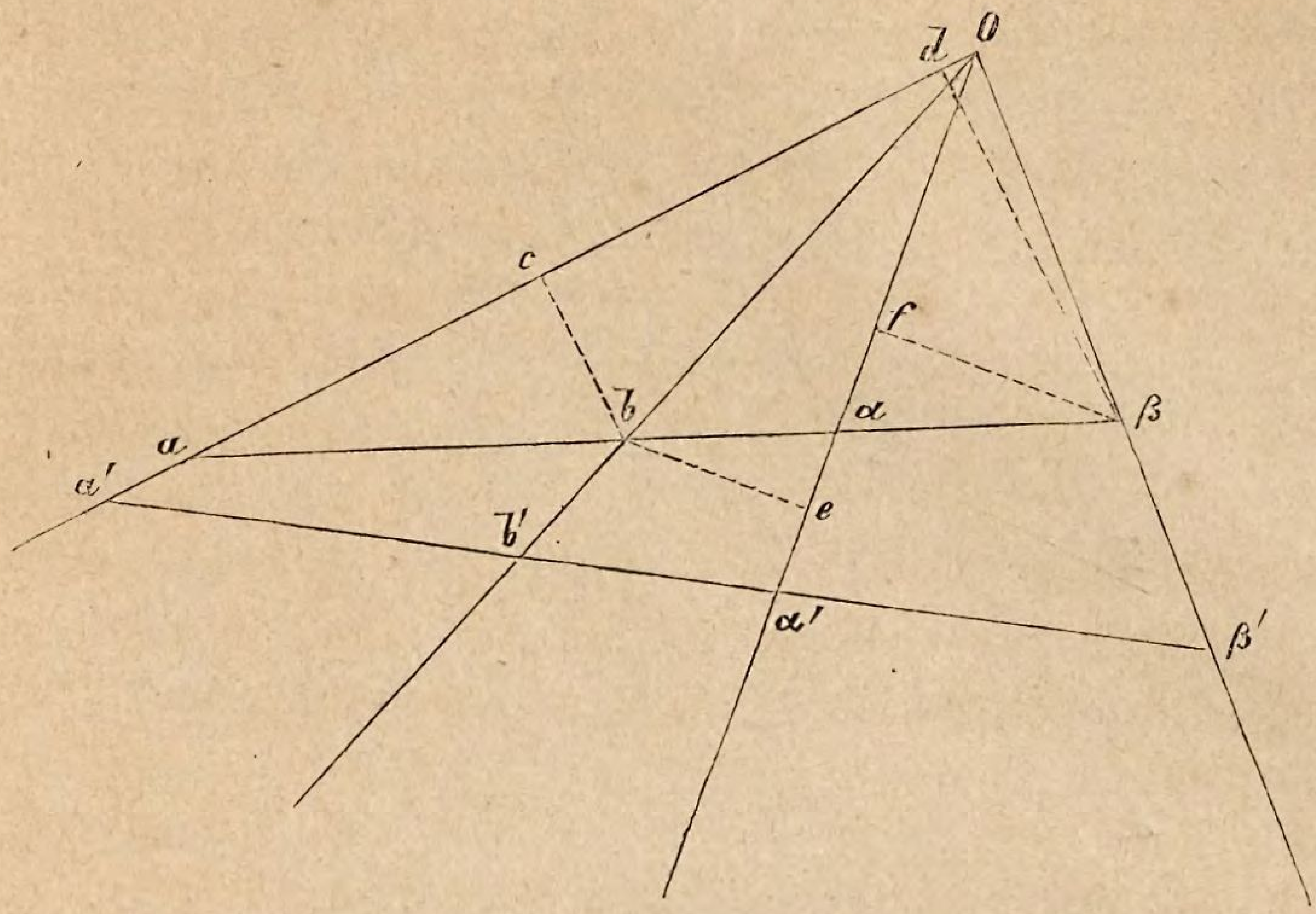
Aus der Gleichung $\frac{2}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} - \frac{1}{\alpha\beta}$ folgt, daß b näher bei α liegt, als β. Aus $2ab \cdot a\beta = a\alpha\ (a\beta + ab)$ ergibt sich leicht: $ab \cdot a\beta = a\alpha \cdot aO$ (Fig. 124).

B. Harmonische Strahlen.

§ 95.

Wenn man von einem beliebigen Punkte O (Fig. 126) durch vier harmonische Punkte a, α, b, β vier Strahlen zieht, so heißen diese Strahlen harmonische Strahlen oder ein harmonisches Strahlenbüschel, Oa und Oα,

Fig. 126.



sowie Ob und Oβ heißen zugeordnete oder conjugirte harmonische Strahlen. Stehen nun bc und βd senkrecht auf Oa, und be und βf senkrecht auf Oα, so ist:

bc : βd = ab : aβ, und

be : βf = αb : $\alpha\beta$. Da aber ab : aβ = αb : $\alpha\beta$,

so ist auch: bc : βd = be : βf, oder

bc : be = βd : βf.

Das Entfernungsverhältniß bc : be ist für alle Punkte des Strahles Ob, und das Entfernungsverhältniß βd : βf für alle Punkte des Strahles Oβ constant.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Alle Punkte zweier zugeordneten harmonischen Strahlen haben von den beiden anderen Strahlen dasselbe Entfernungsverhältniß.

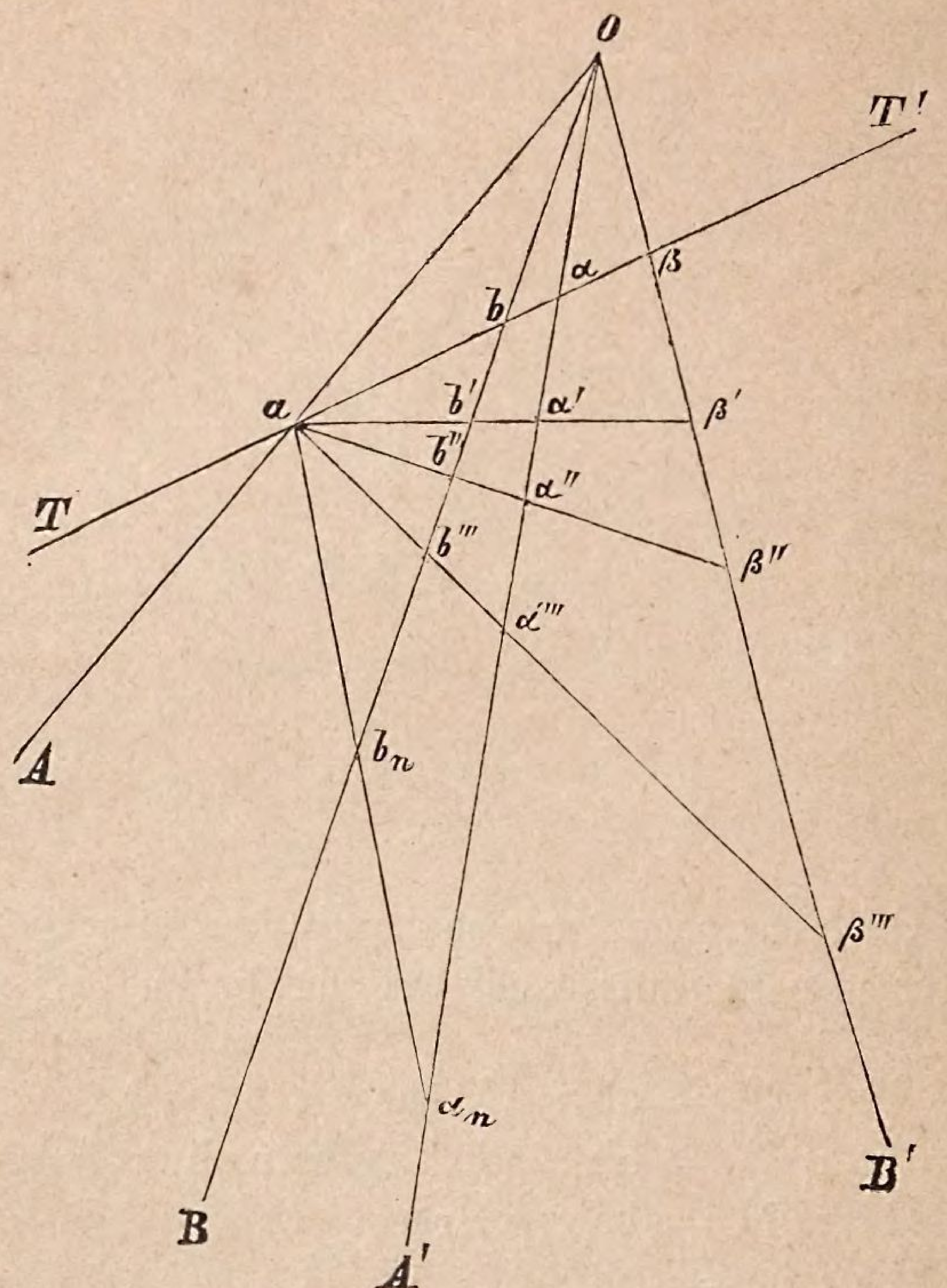
Wenn umgekehrt die vier Strahlen Oa, Oα, Ob, Oβ solche Winkel miteinander bilden, daß bc : be = βd : βf, oder bc : βd = be : βf, so folgt, daß ab : aβ = αb : $\alpha\beta$, also a, α, b, β harmonische Punkte sind. Ebenso ergibt sich a'b' : a'β' = α'b' : α'β'.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Ein harmonisches Strahlenbüschel wird von jeder Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Wenn (Fig. 127) OA, OA' OB, OB' vier harmonische Strahlen sind, und wir ziehen durch einen beliebigen Punkt a des einen Strahles

Fig. 127.



eine Transversale TT', so schneidet dieselbe das harmonische Strahlenbüschel in den harmonischen Punkten a, α, b, β. Drehen wir nun TT' um a herum, so schneidet diese Transversale in jeder Lage das harmonische Strahlenbüschel in vier harmonischen Punkten. In vier Fällen ist die Transversale einem Strahle parallel. Ist dieselbe parallel AO, so fällt sie mit AO zusammen, und die vier harmonischen Punkte sind A, O, O, O; es fallen also drei zusammen. Ist dagegen die Transversale einem der drei anderen Strahlen, z. B. OB', parallel, so rückt der betreffende harmonische Punkt in's Unendliche. Ist also aα_n parallel OB', so sind a, α_n, b_n, β_∞ die vier harmonischen Punkte.

Es ist also $ab_n : \alpha_n b_n = a\beta_\infty : \alpha_n\beta_\infty$. Nun ist aber $a\beta_\infty : \alpha_n\beta_\infty = 1$, da die Strecke a$\alpha_n$ gegen die unendlich große Strecke $\alpha_n\beta_\infty$ verschwindet. Es ist also auch $ab_n : \alpha_n b_n = 1$, oder $ab_n = \alpha_n b_n$; b_n halbirt also die Strecke aα_n.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

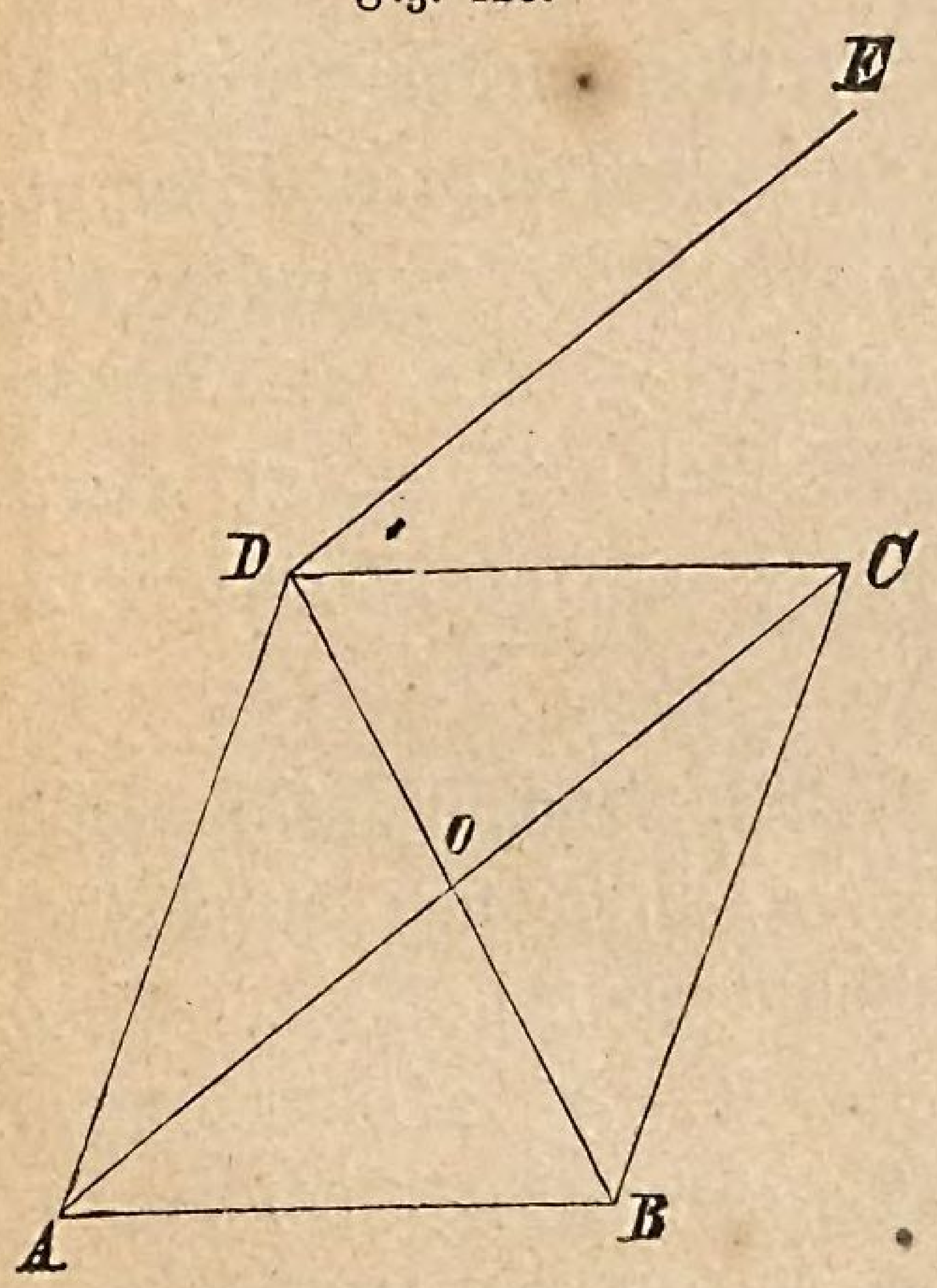
3. Ist die Transversale eines harmonischen Strahlenbüschels einem der Strahlen parallel, so halbirt der zugeordnete Strahl die von den beiden anderen Strahlen begrenzte Strecke der Transversalen.

Wenn umgekehrt $ab_n = b_n\alpha_n$, und $OB' \nparallel a\alpha_n$, so sind Oa, $O\alpha_n$, Ob_n, OB' vier harmonische Strahlen, da a, α_n, b_n, β_∞ vier harmonische Punkte sind, wenn $ab_n = b_n\alpha_n$.

Da im Parallelogramme die beiden Diagonalen sich halbiren (Fig. 128), so erhalten wir vier harmonische Strahlen, wenn wir durch eine Ecke eine Parallele zu der einen Diagonale ziehen.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

Fig. 128.

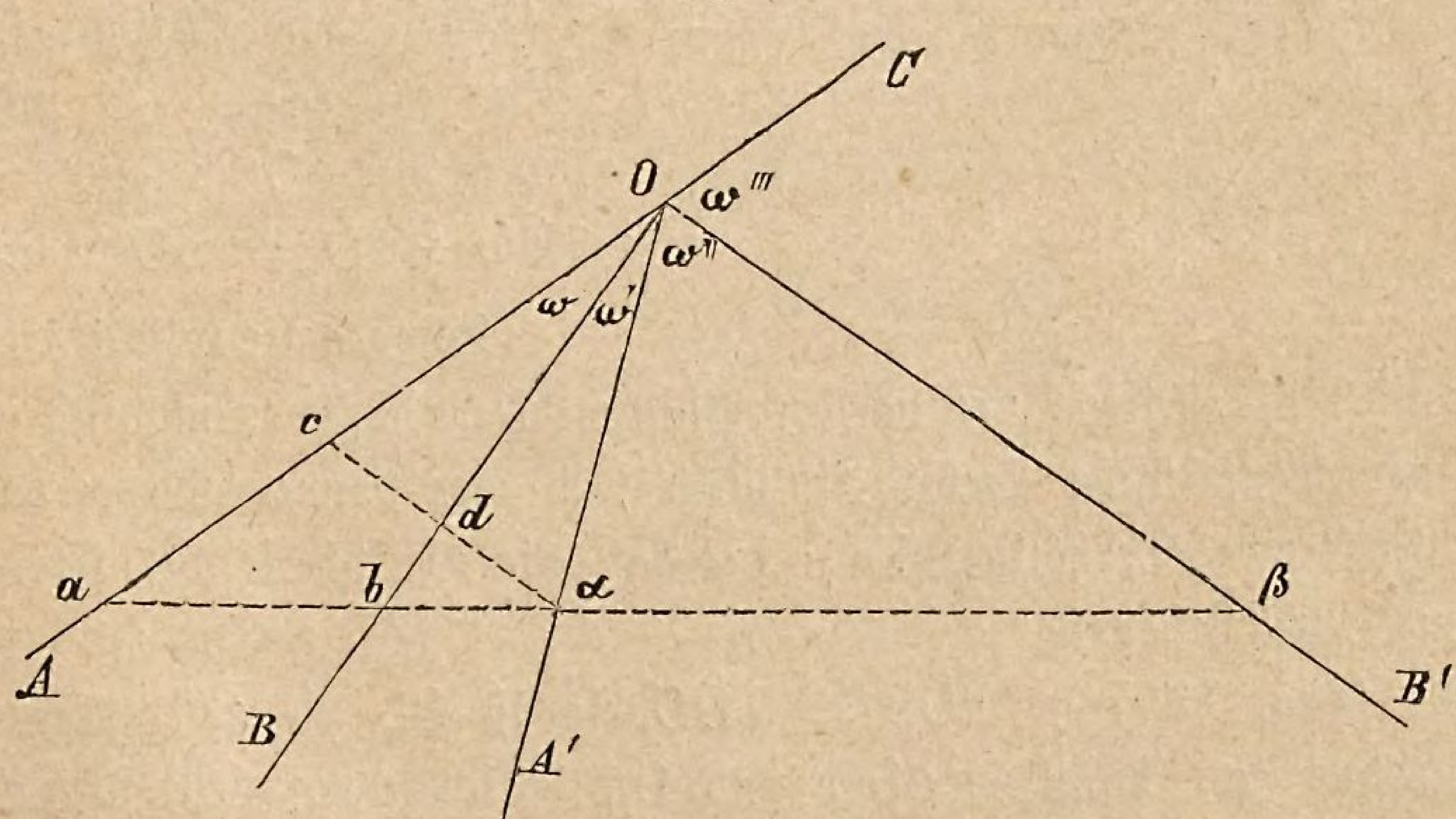


4. Wenn vier von einem Punkte ausgehende Strahlen den Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms parallel sind, so bilden sie ein harmonisches Strahlenbüschel.

§ 96.

Wenn (Fig. 129) $\omega = \omega'$ und $\omega'' = \omega'''$, so sind OB und OB' die Medialen der beiden Nebenwinkel AOA' und $A'OC$, und folglich sind (§ 64, Lehrs. 8) die Strahlen OA, OA', OB, OB' vier harmonische Strahlen.

Fig. 129.



Da $\omega' = \omega$ und $\omega'' = \omega'''$, so ist $\omega' + \omega'' = \omega + \omega'''$, also $\sphericalangle\, BOB' = R$.

Wenn umgekehrt $\omega = \omega'$ und $OB' \perp OB$, so muß $\omega''' = \omega''$ sein, und mithin sind OA, OA', OB, OB' vier harmonische Strahlen.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Errichtet man in dem Scheitel eines Winkels auf die Mediale desselben eine Senkrechte, so bilden die beiden Senkrechten mit den Schenkeln des Winkels ein harmonisches Strahlenbüschel.

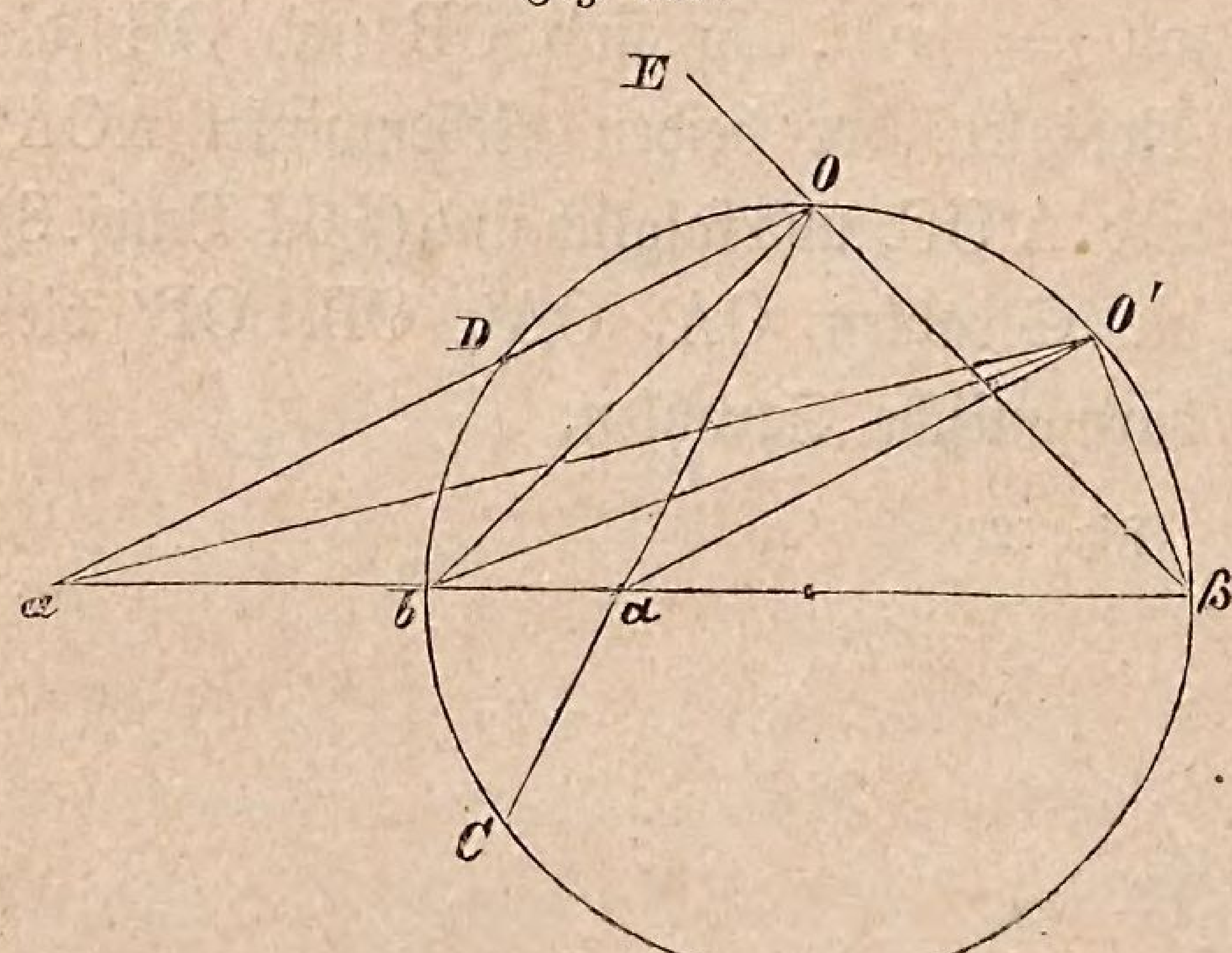
Wenn a, α, b, β (Fig. 129) vier harmonische Punkte, also OA, OA', OB, OB' vier harmonische Strahlen sind, so wird $c\alpha$ in d halbirt, wenn $c\alpha \parallel OB'$ (§ 95, 3). Ist nun $OB' \perp OB$, so ist auch $c\alpha \perp OB$, mithin $\omega = \omega'$ und $\omega'' = \omega'''$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Wenn zwei zugeordnete harmonische Strahlen aufeinander senkrecht stehen, so halbiren sie die Winkel zwischen den beiden anderen Strahlen.

Da (Fig. 129) $\sphericalangle\, bO\beta = R$, so geht der Kreis, von welchem $b\beta$ Durchmesser ist, durch O. Nun ist aber weiter $\sphericalangle\, aO\alpha$ des Dreiecks $aO\alpha$ durch Ob halbirt, da $\omega = \omega'$. Mithin $ab : \alpha b = aO : \alpha O$. Diese Beziehungen bleiben dieselben, wenn man O auf der Peripherie des Kreises verschiebt.

Fig. 130.



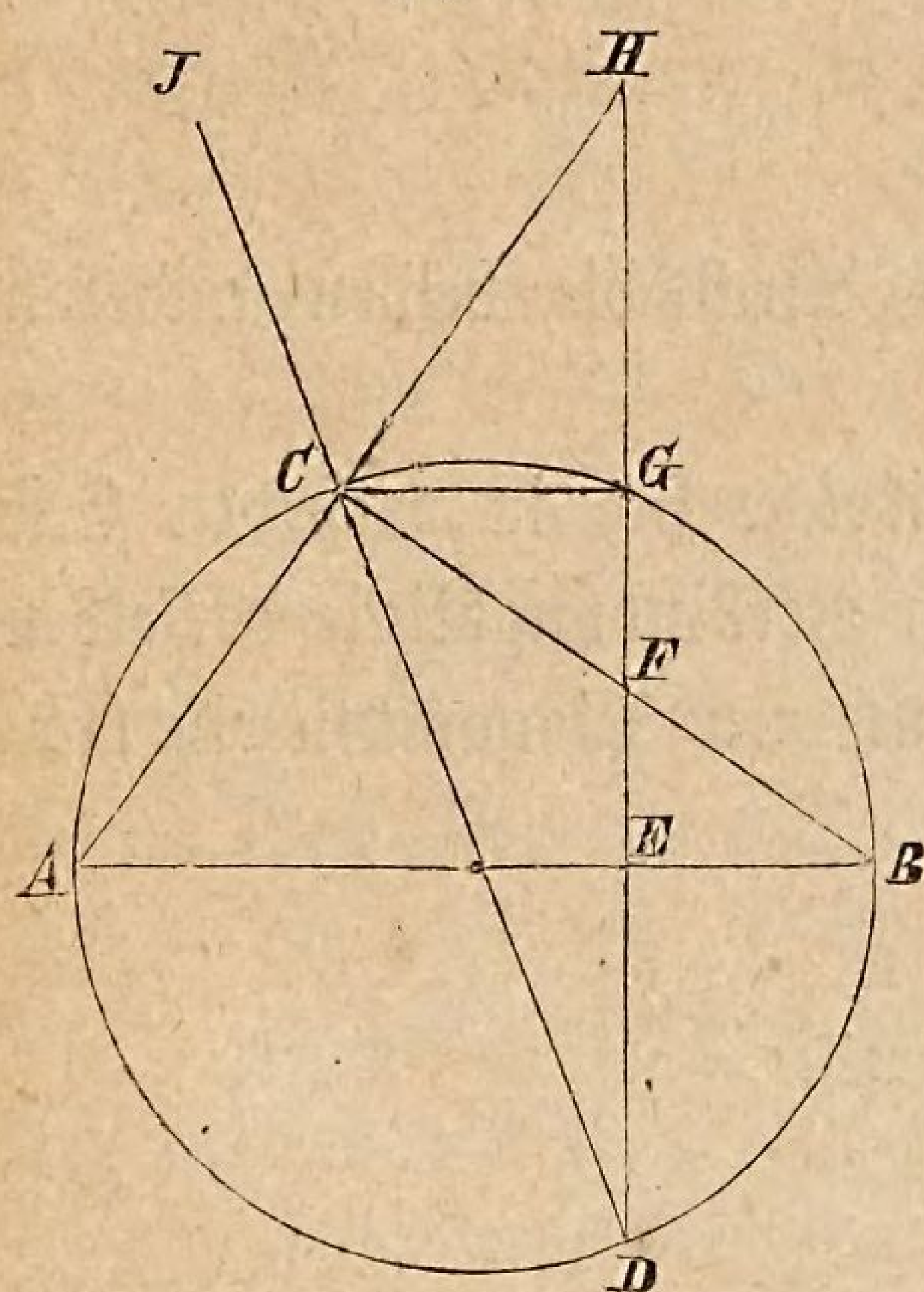
Wenn nämlich (Fig. 130) a, α, b, β vier harmonische Punkte sind, so ist, da $\sphericalangle\, bO\beta = R$, $\sphericalangle\, aOb = bO\alpha$. Da aber auch $\sphericalangle\, bO'\beta = R$, so ist auch $\sphericalangle\, aO'b = bO'\alpha$ (Lehrs. 2). Mithin ist $ab : b\alpha = aO : \alpha O$ und $ab : b\alpha = aO' : \alpha O'$, folglich $aO : \alpha O = aO' : \alpha O'$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Ist die Strecke $a\alpha$ in den Punkten b und β harmonisch getheilt, so ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von a und α das constante Entfernungsverhältniß $ba : b\alpha$ hat, die Peripherie des Kreises, der $b\beta$ zum Durchmesser hat.

Da (Fig. 130) $\sphericalangle\, aOb = bOC$, so ist $CD \perp a\beta$. Wenn aber Ob Mediale des Winkels aOC und $O\beta$ senkrecht auf Ob, so sind OC, Oa, Ob, OE vier harmonische Strahlen, von welchen also die Gerade CD harmonisch getheilt wird.

Fig. 131.



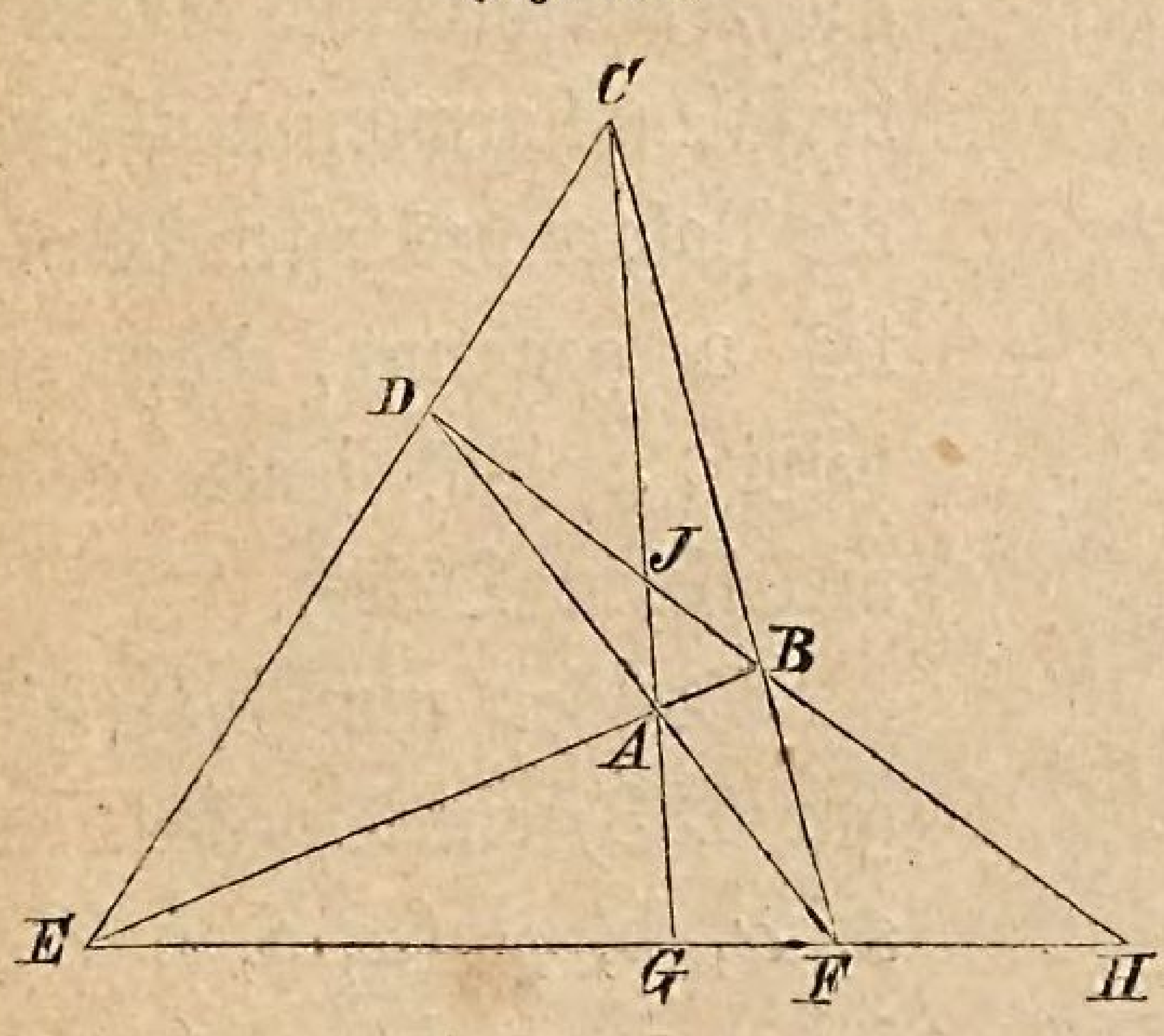
Ist also DH (Fig. 131) eine Sekante des Kreises, Durchmesser AB senkrecht auf DH, so ist ∢ DCB = GCB, und, da ∢ ACB = R, ∢ HCG = ACD = JCH. CB und CH sind also die Medialen zweier Nebenwinkel, und mithin (§ 64, 8) sind CD, CG, CB, CH vier harmonische Strahlen und also D, G, F, H vier harmonische Punkte. Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Jede Sekante des Kreises wird von der Peripherie und den Schenkeln eines Peripheriewinkels über demjenigen Durchmesser, welcher auf der Sekante senkrecht steht, harmonisch getheilt.

§ 97.

Wenn man die gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks ABCD (Fig. 132) bis zu ihren Durchschnittspunkten F und E verlängert, so entsteht das Vierseit EBFDC. Dasselbe hat die drei Diagonalen AC, BD und EF. Um die Beziehungen der durch die Seiten und Diagonalen gebildeten Abschnitte zu finden, betrachten wir EB, FD und CG als drei Ecktransversalen des Dreiecks EFC, die durch denselben Punkt A gehen, und DH als Seitentransversale desselben Dreiecks.

Fig. 132.



Alsdann ist:

$$EG \cdot FB \cdot CD = FG \cdot BC \cdot ED \text{ (§ 65, 3).}$$
$$EH \cdot FB \cdot CD = FH \cdot BC \cdot ED \text{ (§ 65, 1).}$$
$$\overline{}$$
$$EG : EH = FG : FH.$$

Die Diagonale EF des Vierseits wird also durch die beiden anderen Diagonalen CA und DB harmonisch getheilt.

Da E, F, G, H vier harmonische Punkte sind, so sind die Strahlen CE, CF, CG, CH vier harmonische Strahlen. Mithin sind auch D, B, J, H vier harmonische Punkte (§ 95, 2). Hieraus folgt weiter, daß

EC, EB, EJ, EH vier harmonische Strahlen sind; also sind auch C, A, J, G vier harmonische Punkte.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Jede Diagonale eines Vierseits wird durch die beiden anderen Diagonalen harmonisch getheilt.

2. Je zwei Seiten und die Diagonale, welche sich in derselben Ecke eines Vierseits schneiden, bilden mit der geraden Verbindungslinie derselben Ecke und dem Durchschnittspunkte der beiden anderen Diagonalen ein harmonisches Strahlenbüschel.

C. Pole und Polaren des Kreises.

§ 98.

Fig. 133 a.

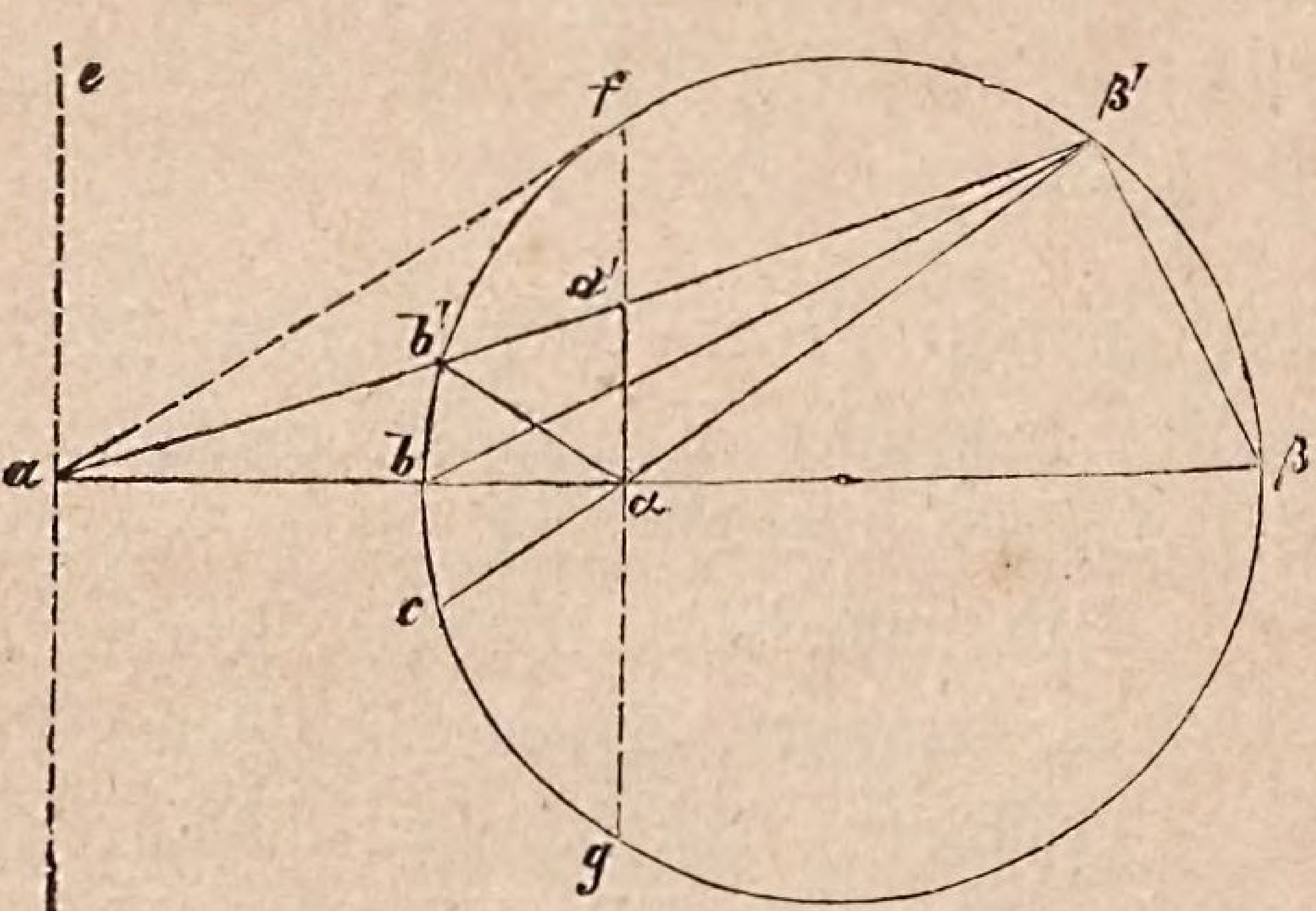
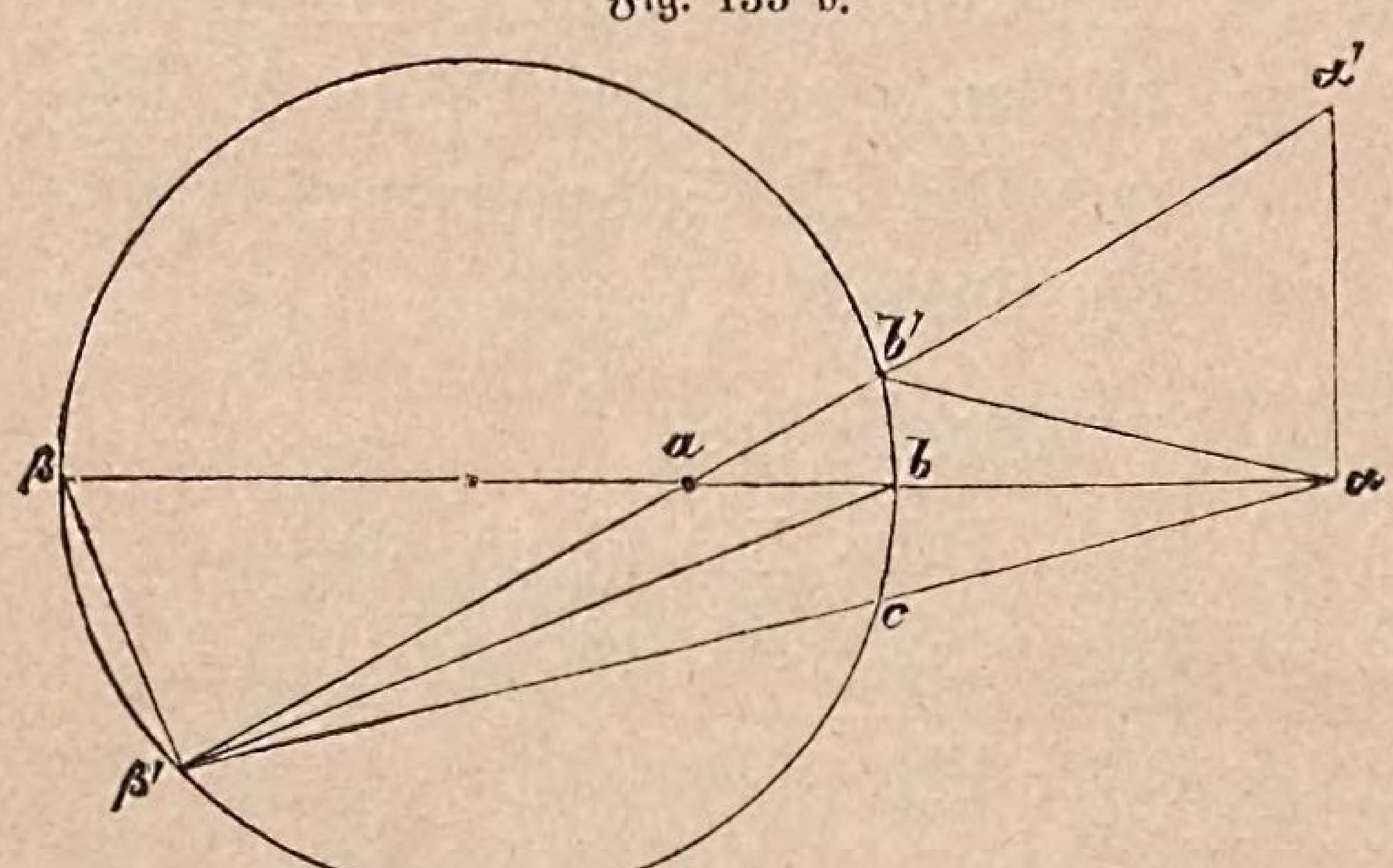


Fig. 133 b.



Wenn in der Ebene eines Kreises sich eine Transversale um einen festen Punkt a dreht, so wird der geometrische Ort des Punktes α, der mit a und der Kreislinie die Transversalen harmonisch theilt, die Polare des festen Punktes a genannt, dagegen heißt a Pol jenes geometrischen Ortes.

Es sei nun bβ (Figur 133) ein Durchmesser a, α, b, β (α, a, b, β), sowie a, α', b', β' (α', a, b', β') harmonische Punkte. Alsdann ist $\sphericalangle$ aβ'b $=$ b$\beta'\alpha$ (§ 96, 2); mithin Bogen bb' $=$ Bog. bc. Daraus ergibt sich leicht, daß $\sphericalangle$ bαb' $=$ bαc. Es sind aber αa, $\alpha\alpha'$, αb', $\alpha\beta'$ vier harmonische Strahlen, folglich, wie sich aus § 96, 1 leicht ergibt, $\alpha\alpha' \perp \alpha$a. Die Polare des Punktes a ist mithin eine gerade Linie, welche in α auf bβ senkrecht steht.

Wenn also der Durchmesser $b\beta$ (Fig. 133) in a und α harmonisch getheilt ist, so steht die Polare des Punktes a in α, und die Polare des Punktes α in a auf dem Durchmesser $b\beta$ senkrecht. $\alpha\alpha'$ ist also die Polare von a, ae die Polare von α, während a der Pol von $\alpha\alpha'$ und α der Pol von ae ist.

Je mehr sich die durch den Pol a gehenden Transversalen von der durch den Mittelpunkt gehenden entfernen, um so näher rücken die Durchschnittspunkte des Kreises, also die beiden zugeordneten Punkte (b, β), um schließlich zusammenzufallen, wenn die Transversale Tangente wird. Da aber die zugeordneten Punkte (b, β) auf verschiedenen Seiten der Polare liegen müssen, so geht die Polare durch die Berührungspunkte der durch den Pol a gehenden Tangenten.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Zieht man von einem Punkte an einen Kreis die beiden Tangenten, so ist die Berührungssehne die Polare des Punktes.

Der Lehrsatz 1 ergibt sich auch aus § 94 (Fig. 125).

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich leicht folgende Lehrsätze:

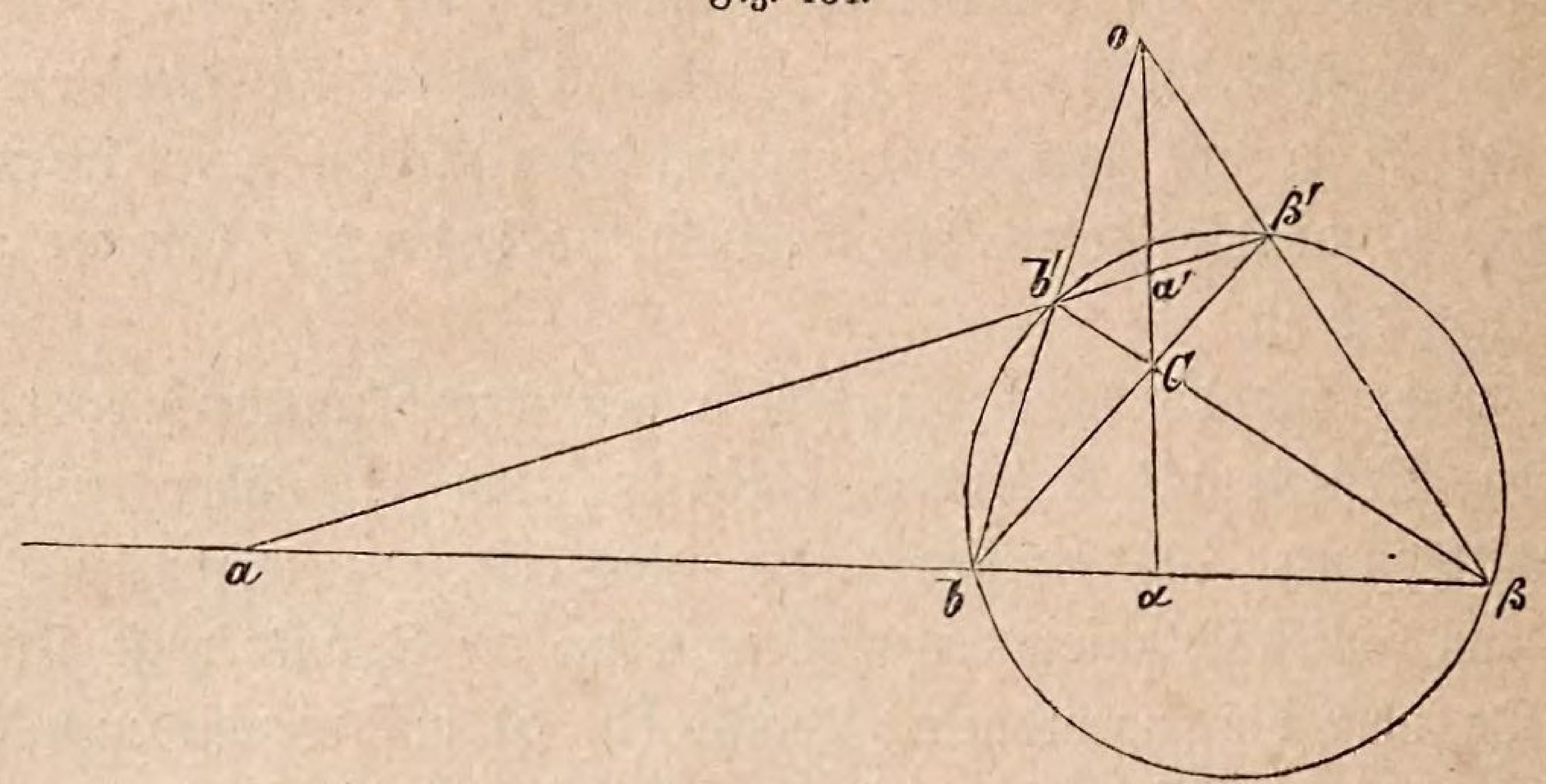
2. Die Polaren der Punkte einer Geraden schneiden sich in dem Pole der Geraden.

3. Zieht man von den Punkten einer Geraden je zwei Tangenten an einen Kreis, so gehen die Berührungssehnen durch den Pol der Geraden.

§ 99.

Zieht man von einem Punkte a an einen Kreis zwei Sekanten $ab\beta$ und $ab'\beta'$, so bilden die vier Durchschnittspunkte b, β, β', b' ein Kreisviereck (Fig. 134). Es seien nun α und α' die Punkte, welche mit a die Sehnen $b\beta$ und $b'\beta'$ harmonisch theilen. Alsdann ist (§ 98) die Gerade $\alpha\alpha'$ die Polare des Punktes a. Schneiden sich nun die verlängerten Strecken bb' und $\alpha\alpha'$ in O, so muß der Strahl $O\beta'$ durch β gehen, weil Oa, $O\alpha'$, Ob', $O\beta'$ vier harmonische Strahlen sind (siehe § 95, 2). Zieht man außerdem die Diagonale $\beta b'$, welche $O\alpha$ in C schneidet, so sind Ca, $C\alpha$, Cb, $C\beta$ vier harmonische Strahlen. Dieselben müssen also auch die Sekante $a\beta'$ harmonisch schneiden. Da nun die Strahlen Ca, $C\alpha$, $C\beta$ die Sekante $a\beta'$ in a, α', b' schneiden, so muß der Strahl Cb durch β' gehen, also schneiden sich die Diagonalen $b\beta'$ und $b'\beta$ auf $O\alpha$, d. i. auf der Polare des Punktes a, in welchem sich die Gegenseiten βb und $\beta' b'$ schneiden.

Fig. 134.



Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Die Gerade, welche durch die Durchschnittspunkte der Diagonalen und zweier Gegenseiten eines Kreisvierecks geht, ist die Polare des Durchschnittspunktes der beiden anderen Gegenseiten desselben Vierecks.

Der Punkt a hat nur eine Polare Oα (Fig. 134). Dreht man nun aβ' um a, so schneiden sich stets bb' und $\beta\beta'$ auf der Polare Oα, also auch, wenn aβ' der Sekante aβ unendlich nahe kommt; alsdann werden aber bb' und $\beta\beta'$ zu Tangenten in b und β.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

2. Zieht man von einem festen Punkte Sekanten an einen Kreis, so schneiden sich die Tangenten in den Durchschnittspunkten derselben Sekante mit dem Kreise auf der Polare des festen Punktes.

2. Aehnlichkeit der Kreise.

A. Aehnlichkeitsbeziehungen zweier Kreise.

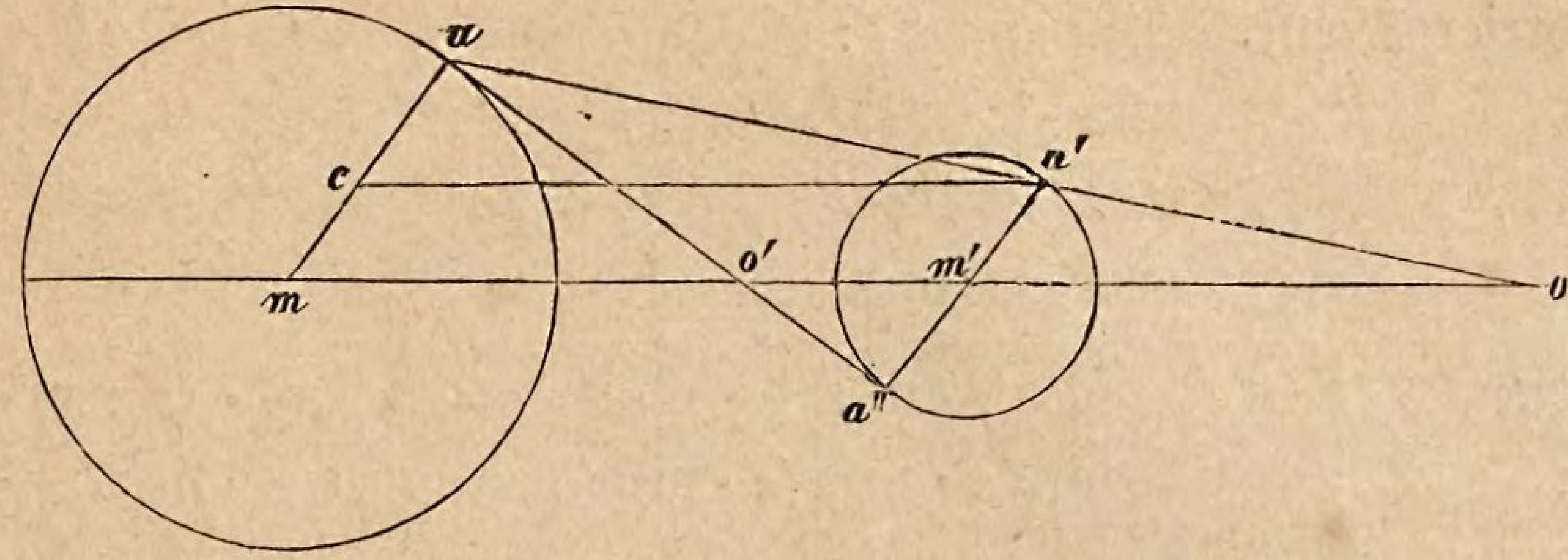
§ 100.

Es sei (Fig. 135) ma $\#$ m'a' und ca' $\#$ mm'. Alsdann ist:

$$\frac{mO}{ma} = \frac{ca'}{ca} = \frac{mm'}{ma - m'a'};$$

mithin $mO = \frac{R \cdot mm'}{R - R'}$, wenn die Halbmesser der beiden Kreise R und R' heißen. mO ist also größer als mm', d. h. O liegt in der Verlängerung von mm'. Der Werth von mO ist constant, also unabhängig von der Richtung der parallelen Radien ma und m'a'. Ziehen wir also zwei parallele Radien mx und m'x', so geht die Gerade xx' durch O. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß jeder von O ausgehende Strahl,

Fig. 135.



welcher die beiden Kreislinien trifft, von diesen in constantem Verhältnisse, nämlich von R zu R', getheilt wird. Die beiden Kreise sind also in jeder Lage ähnlich und ähnlich gelegen, und O ist ein Aehnlichkeitspunkt. Verbindet man die Endpunkte a und a'' der beiden antiparallelen Radien ma und m'a'', so schneidet diese gerade Verbindungslinie die Mittelpunktslinie mm' in dem Punkte O', der zwischen den Mittelpunkten der beiden Kreise, während O auf derselben Seite beider Mittelpunkte liegt. Alsdann ist:

$$mO' : mm' - mO' = R : R'; \text{ mithin:}$$

$$mO' = \frac{R \cdot mm'}{R + R'}.$$

mO' ist also kleiner als mm', d. h. O' liegt zwischen m und m'. O' ist auch ein Aehnlichkeitspunkt. O wird Mittelpunkt der direkten und O' Mittelpunkt der inversen Aehnlichkeit genannt. O heißt auch äußerer und O' innerer Aehnlichkeitspunkt. Wenn die beiden Kreise sich berühren, so ist der Berührungspunkt ein Mittelpunkt der direkten Aehnlichkeit, wenn sie sich von innen berühren, der inversen, wenn sie sich von außen berühren. Da

$$Om : Om' = R : R', \text{ und}$$
$$O'm : O'm' = R : R', \text{ so ist}$$
$$\overline{}$$
$$Om : Om' = O'm : O'm'.$$

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Zwei Kreise sind in jeder Lage ähnliche und ähnlich gelegene Figuren.

2. Die beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise theilen die Mittelpunktsstrecke harmonisch.

B. Aehnlichkeitsbeziehungen dreier Kreise.

§ 101.

Es seien (Fig. 136) m_1, m_2, m_3 die Mittelpunkte, r_1, r_2, r_3 die

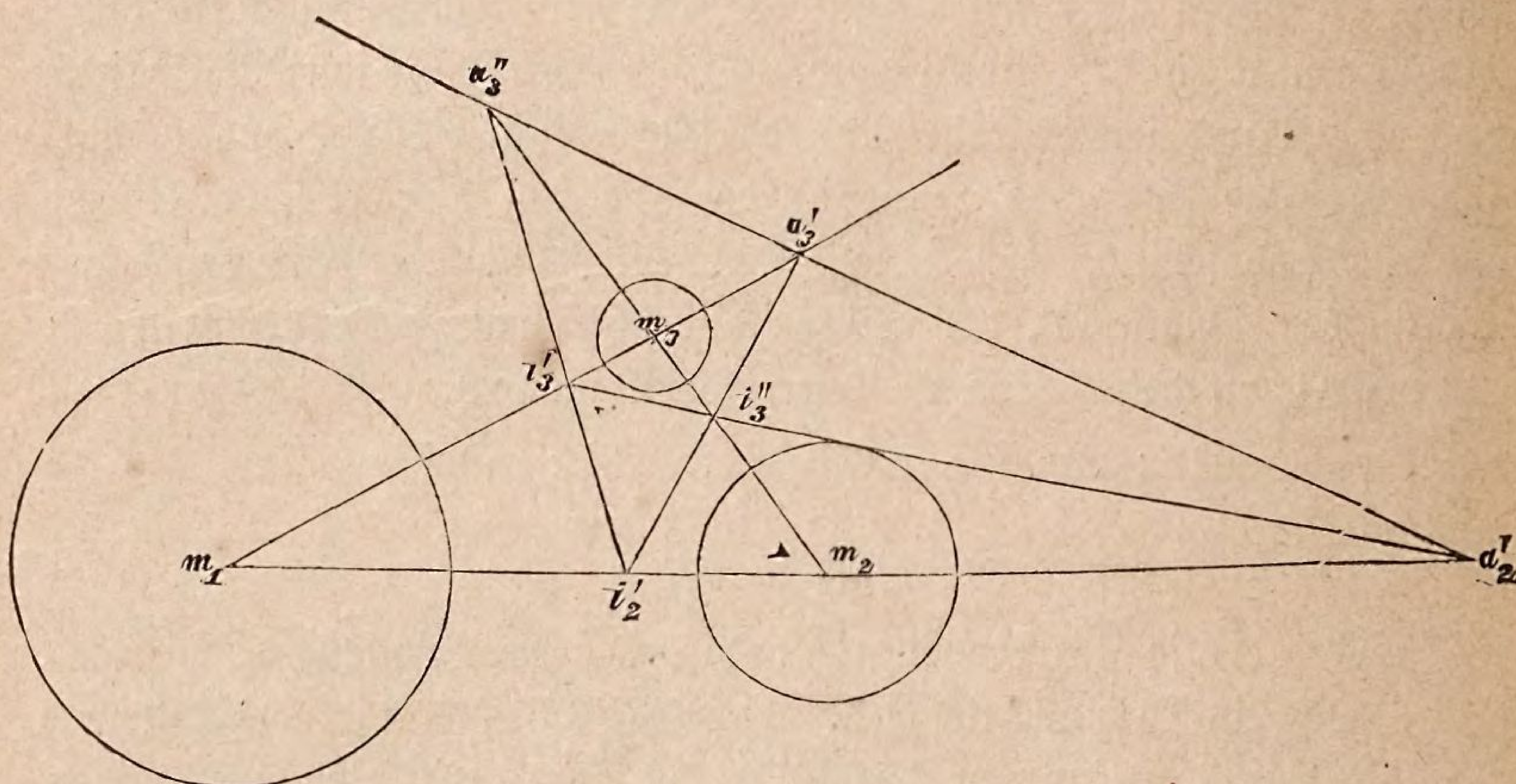
Radien, i'_2, i'_3, i''_3 die innern, a'_2, a'_3, a''_3 die äußeren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise. Alsdann ist:

$$m_1a'_2 : m_2a'_2 = r_1 : r_2;$$
$$m_2a''_3 : m_3a''_3 = r_2 : r_3;$$
$$m_3a'_3 : m_1a'_3 = r_3 : r_1;$$

$$m_1a'_2 \cdot m_2a''_3 \cdot m_3a'_3 : m_2a'_2 \cdot m_3a''_3 \cdot m_1a'_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 : r_2 \cdot r_3 \cdot r_1.$$

Folglich: $$m_1a'_2 \cdot m_2a''_3 \cdot m_3a'_3 = m_2a'_2 \cdot m_3a''_3 \cdot m_1a'_3.$$

Fig. 136.



Also liegen (§ 65, 2) die drei Punkte a'_2, a'_3, a''_3 in gerader Linie. Ferner ist:

$$m_1i'_2 : m_2i'_2 = r_1 : r_2;$$
$$m_2i''_3 : m_3i''_3 = r_2 : r_3;$$
$$m_3a'_3 : m_1a'_3 = r_3 : r_1; \text{ mithin:}$$

$$m_1i'_2 \cdot m_2i''_3 \cdot m_3a'_3 : m_2i'_2 \cdot m_3i''_3 \cdot m_1a'_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 : r_2 \cdot r_3 \cdot r_1.$$

Folglich: $$m_1i'_2 \cdot m_2i''_3 \cdot m_3a'_3 = m_2i'_2 \cdot m_3i''_3 \cdot m_1a'_3.$$

Also liegen (§ 65, 2) die drei Punkte i'_2, i''_3, a'_3 in gerader Linie. Ebenso ergibt sich, daß i'_2, i'_3, a''_3, sowie i'_3, i''_3, a'_2 in gerader Linie liegen. Wir erhalten also den Lehrsatz:

1. Bei drei Kreisen liegen die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte, sowie je ein äußerer und die beiden nicht zugehörigen inneren Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie.

C. Potenzialität der Kreise.

§ 102.

Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Kreises eine den Kreis treffende Gerade, so ist das constante Produkt der beiden Abschnitte zwischen dem Punkte und der Kreislinie die Potenz des Punktes in Beziehung auf den Kreis (siehe § 79). Ist die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte e, der Radius des Kreises r, so haben wir für die Potenz p die Beziehung:

$$p = e^2 - r^2.$$

Wird bei einer Geraden von einem ihrer Punkte aus die eine Richtung als die positive bezeichnet, so ist die entgegengesetzte negativ. Die äußere Potenz (oder Potenz eines Punktes außerhalb des Kreises) ist daher positiv, die innere negativ (§ 79).

Die äußere Potenz ist (nach § 79, 1) gleich dem Quadrate der von dem Punkte an den Kreis gehenden Tangente, die innere Potenz dem absoluten Werthe nach gleich dem Quadrate der durch den Punkt gehenden kleinsten Halbsehne.

Die Potenzen eines Punktes in Beziehung auf zwei Kreise seien p′ und p″, die Radien der Kreise r′ und r″, die Entfernungen des Punktes von den beiden Mittelpunkten e′ und e″. Alsdann ist:

$$p' = e'^2 - r'^2;$$
$$p'' = e''^2 - r''^2; \text{ mithin:}$$

$$p' - p'' = (e'^2 - e''^2) - (r'^2 - r''^2).$$

Wenn also $p' = p''$, so ist $(e'^2 - e''^2) = (r'^2 - r''^2)$, und wenn $(e'^2 - e''^2) = (r'^2 - r''^2)$, so ist $p' = p''$.

Wir erhalten also die Lehrsätze:

1. Sind die Potenzen eines Punktes in Beziehung auf zwei Kreise einander gleich, so ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen des Punktes von den Mittelpunkten gleich der Differenz der Quadrate der Radien.

2. Ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines Punktes von den Mittelpunkten zweier Kreise gleich der Differenz der Quadrate der Radien, so hat der Punkt in Beziehung auf beide Kreise gleiche Potenzen.

Die Gesammtheit der Punkte, welche in Beziehung auf zwei Kreise gleiche Potenzen haben, heißt Potenzlinie beider Kreise.

Es sei nun P irgend ein Punkt der Potenzlinie der beiden Kreise um C' und C'', oder für P ist $p' = p''$, oder $(e'^2 - e''^2) = (r'^2 - r''^2)$. Denken wir uns nun das Dreieck $PC'C''$ um $C'C''$ herumgedreht, so erhalten wir auf der anderen Seite von $C'\ C''$ einen Punkt P', für welchen $P'C' = e'$ und $P'C'' = e''$. Also ist auch P' ein Punkt der Potenzlinie. Verbindet man P' mit P durch eine gerade Linie, so steht diese auf $C'C''$ senkrecht im Punkte P''. Da aber $e'^2 - e''^2$ oder $PC'^2 - PC''^2 = r'^2 - r''^2$, so ist auch $P''C'^2 - P''C''^2 = r'^2 - r''^2$, und wenn P''' irgend ein Punkt der Geraden PP', so ist auch $P'''C'^2 - P'''C''^2 = r'^2 - r''^2$. Also ist die Gerade PP' die Potenzlinie beider Kreise.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

3. Zieht man durch einen Punkt gleicher Potenzen zweier Kreise eine Senkrechte auf die Mittelpunktslinie, so ist diese Senkrechte die Potenzlinie der zwei Kreise.

Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sehne mit der Mittelpunktslinie ein Punkt gleicher Potenzen der beiden Kreise. Da nun diese Sehne auf der Mittelpunktslinie senkrecht steht, so ist die Gerade der gemeinschaftlichen Sehne die Potenzlinie der beiden Kreise. Daher heißt die Potenzlinie auch Chordale.

Zieht man von einem Punkte der Potenzlinie zweier Kreise Tangenten und Sekanten an beide Kreise, so sind die Tangentenabschnitte einander gleich und das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkte einer Sekante mit ihrem äußeren Abschnitte.

Es seien P''_1, P'''_1, $P_{,,}'''$ die drei Potenzlinien von drei Kreisen. Wenn nun P''_1 und P'''_1 sich in M schneiden, so sind die Abschnitte der Tangenten von M an den ersten und zweiten, so wie an den ersten und dritten, also auch die Abschnitte der Tangenten von M an den zweiten und dritten Kreis einander gleich. Mithin ist M auch ein Punkt der Potenzlinie $P_{,,}'''$.

Wir erhalten also den Lehrsatz:

4. Wenn die Potenzlinien dreier Kreise sich schneiden, so schneiden sie sich in einem Punkte, dem Potenzpunkte oder Chordalpunkte der drei Kreise.

Aufgaben.

§ 103.

803. Die Strecke aα in dem gegebenen Verhältnisse p zu q harmonisch zu theilen.

804. Auf einer Geraden sind die Punkte a und α und 1) zwischen ihnen, 2) in der Verlängerung von aα der Punkt b gegeben. Zu a, α, b den vierten harmonischen Punkt zu suchen.

805. Einen Kreis zu construiren, der die Strecke aα harmonisch theilt, und 1) dessen Mittelpunkt von α eine gegebene Entfernung hat; 2) dessen Radius gegeben ist, 3) welcher durch einen gegebenen Punkt geht.

806. Zu drei von dem Punkte O ausgehenden Strahlen den vierten harmonischen Strahl zu construiren.

807. Es sind gegeben die vier harmonischen Punkte a, α, b, β und die beiden Punkte c und d, welche mit a in derselben Geraden liegen. Auf die einfachste Weise einen Punkt e zu bestimmen, der 1) mit c die Strecke ad, 2) mit d die Strecke ac harmonisch theilt.

808. Durch die Ecke C des Dreiecks ABC einen Strahl CX zu ziehen, welcher mit der durch C gehenden Mittellinie des Dreiecks und den Seiten CA und CB ein harmonisches Strahlenbüschel bildet.

809. Durch die Ecke D des Parallelogramms ABCD einen Strahl DX zu ziehen, welcher mit der Diagonale DB und den Seiten DA und DC ein harmonisches Strahlenbüschel bildet.

810. Den geometrischen Ort des Punktes zu construiren, der von zwei gegebenen Punkten das Entfernungsverhältniß p zu q hat.

Von einem Dreiecke sind gegeben:

811. c, h_c, a : b. 812. c, m_c, a : b. 813. c, h_a, a : b.
814. c, $\mu\gamma$, a : b. 815. m_a, m_c, a : b.

816. Welche Gerade ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des Kreises, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet?

817. Welche Gerade ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des Kreises, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht?

818. Einen Kreis zu construiren, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet und durch zwei gegebene Punkte geht.

819. Wenn zwei Kreise von einem dritten durchschnitten werden, auf welcher Geraden liegt dann der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sehnen?

820. Die Potenzlinie zweier Kreise zu construiren.

821. Den Potenzpunkt dreier Kreise zu suchen.

822. Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht.

823. Gegeben ein Kreis und ein Punkt. Die Polare des Punktes in Beziehung auf den gegebenen Kreis zu construiren.

824. Gegeben ein Kreis und eine Gerade. Den Pol dieser Geraden in Beziehung auf den gegebenen Kreis zu suchen.

825. Durch einen Punkt in der Ebene eines Kreises sind Sekanten oder Sehnen gezogen. Welches ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes der Geraden, welche die homologen Schneidepunkte von je zwei Sekanten oder Sehnen mit der Kreislinie verbinden? Zu diesen Durchschnittspunkten gehört auch der Durchschnittspunkt der Tangenten in den Schneidepunkten einer Sekante oder Sehne. Warum?

826. Die beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise zu suchen.

827. Mit Hülfe der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise zu construiren.

828. Von drei gegebenen Kreisen sind zwei äußere Aehnlichkeitspunkte bekannt. Wie findet man dann am einfachsten den dritten?

829. Von drei gegebenen Kreisen sind die drei inneren Aehnlichkeitspunkte bekannt. Wie findet man dann am einfachsten die äußeren?

830. Von drei gegebenen Kreisen sind zwei äußere und ein innerer Aehnlichkeitspunkt bekannt. Wie findet man dann am leichtesten die drei übrigen Aehnlichkeitspunkte?

831. Was für Punkte sind die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangentenpaare zweier Kreise? Was für eine gegenseitige Lage haben dieselben bei drei Kreisen?

832. Welches ist der innere Aehnlichkeitspunkt zweier sich von außen berührenden Kreise?

833. Welches ist der äußere Aehnlichkeitspunkt zweier sich von innen berührenden Kreise?

834. Wenn zwei Kreise von einem dritten 1) gleichartig d. h. beide von außen oder beide von innen, 2) ungleichartig berührt werden, mit welchem Punkte liegen dann die Berührungspunkte in gerader Linie?

835. Von dem Aehnlichkeitspunkte O zweier Kreise m und m' ist ein Aehnlichkeitsstrahl Oa gezogen, der die beiden Kreise m und m' in a, b, c, d schneidet, so daß a und c, b und d homologe Punkte sind. 1) Welche Beziehung ergibt sich zwischen den vier Strecken Oa, Ob, Oc, Od, wenn man die vier Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkte des zugehörigen Kreises verbindet? 2) Es soll bewiesen werden, daß die Kreise m und m' in den nicht homologen (inversen) Punkten a und d, sowie in b und c von einem dritten Kreise berührt werden.

836. Von einem Aehnlichkeitspunkte O zweier Kreise m und m' sind zwei Aehnlichkeitsstrahlen gezogen, welche die beiden Kreise in a, b, c, d und in a', b', c', d' schneiden. 1) Man vergleiche die Geraden aa' und cc' hinsichtlich ihrer Richtung. 2) Was für Vierecke sind bb'c'c und aa'd'd? 3) Warum liegt der Durchschnittspunkt P von b'b und c'c auf der Potenzlinie der beiden Kreise m und m'? 4) Warum ist P ein Aehnlichkeitspunkt der Berührungskreise β und β', welche die Kreise m

und m′ in b und c, sowie in b′ und c′ berühren? 5) Durch welchen Punkt der beiden Berührungskreise β und β' geht also die Potenzlinie der beiden Kreise m und m′? 6) Durch welchen Punkt der Kreise m und m′ geht also auch die Potenzlinie der Kreise β und β'? 7) Auf welcher Geraden liegt der Durchschnittspunkt e der Tangenten in c und c′, sowie der Durchschnittspunkt e′ der Tangenten in b und b′? 8) Warum ist der Durchschnittspunkt p von cc′ und dd′ der Pol der durch O und e gehenden Potenzlinie der Kreise β und β' in Beziehung auf den Kreis m′?

837. Wie viele gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahlen dreier Kreise gibt es?

838. Es sollen die Berührungskreise dreier gegebener Kreise m, m′, m″ construirt werden.

Construktion. Man ziehe einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl A; bestimme den Pol p von A in Beziehung auf den Kreis m und den Potenzpunkt P der drei Kreise; verbinde p mit P, welche Gerade den Kreis m in c und c′ schneidet, oder in einem Punkte berührt, oder gar nicht trifft; verbinde c und c′ mit dem Mittelpunkte m und verlängere diese geraden Linien bis zum Durchschnittspunkte mit der von P auf den gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl gefällten Senkrechten, so sind diese Durchschnittspunkte die Mittelpunkte zweier Kreise, welche die drei gegebenen Kreise berühren, und zwar m in c oder c′.

839. Wie viele Berührungskreise an drei gegebene Kreise kann es geben?

C. F. Winter'sche Buchdruckerei in Darmstadt.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten

Heidelberg 1877